UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

BINDING LIST JUN 1 5 1921

COURS D'ASTRONOMIE

PARTIE GÉNÉRALE ÉLÉMENTAIRE

IMPRIMERIE FRANÇOIS CEUTERICK, LOUVAIN

Astron
A

COURS
D'ASTRONOMIE

PARTIE GÉNÉRALE ÉLÉMENTAIRE

PAR

Maurice ALLIAUME
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LOUVAIN

LOUVAIN
A. Uystpruyst-Dieudonné
LIBRAIRE-ÉDITEUR
Rue de la Monnaie, 10

PARIS
Gauthier-Villars et Cie
LIBRAIRE
Quai des Grands Augustins, 55

1920

162312
28/5/21

Digitized by the Internet Archive
in 2026 with funding from
University of Toronto

https://archive.org/details/coursdastronomie00alli

PRÉFACE

Cet ouvrage a été écrit pour les auditeurs du cours élémentaire d'Astronomie à l'Université de Louvain. Ce cours élémentaire a pour objet de préparer à l'Astronomie mathématique et à la Mécanique céleste les étudiants du doctorat en Sciences physiques et mathématiques. Suivi aussi par les élèves-ingénieurs, il doit leur donner une connaissance de l'Astronomie qui satisfasse aux exigences de leur formation générale et leur permette de recevoir un enseignement scientifique de la Topographie.

L'auteur a tracé le plan de ce livre en s'imposant de suivre les progrès de l'Astronomie dans leur évolution logique, et tels qu'ils se seraient presque nécessairement succédé dans l'esprit d'un même astronome, d'existence illimitée. C'est une application de la pensée de Pascal : « Toute la suite des hommes doit être considérée comme un même homme, qui subsiste toujours et qui apprend continuellement ».

* * *

Ce programme imposait une division en trois parties, suivant le point à partir duquel se fait, dans chacune d'elles, l'étude de l'univers ; ce sera, successivement : l'ŒIL DE L'OBSERVATEUR, le CENTRE DE LA TERRE, le CENTRE DU SOLEIL ; et les systèmes de coordonnées construits, pour cette étude, autour de ces points, seront successivement des systèmes de COORDONNÉES LOCALES, de COORDONNÉES GÉOCENTRIQUES, de COORDONNÉES HÉLIOCENTRIQUES.

Coordonnées locales

I. — Les lois physiques maintiennent l'observateur entre deux surfaces peu distantes de la surface terrestre, dont il ignore toute chose : peut-être même ne peut-il voir la mer et constater la rondeur de l'horizon. Aucun point de l'espace n'a pour lui plus d'importance que tout autre : il commence donc par rapporter la position de tout point à sa propre position, et, dans la PREMIÈRE PARTIE de ses recherches, l'ŒIL DE L'OBSERVATEUR est le point fondamental, et comme le centre de l'espace.

Quelle est la première connaissance acquise par l'observateur ? Quel est le premier phénomène observable dont la manifestation puisse s'exprimer par une loi ? Ce n'est pas dans le mouvement des astres qu'il le trouve, car il n'a encore aucun moyen de débrouiller leur complexité. C'est donc un fait terrestre, et le fait immédiatement observable est la constance de la direction de la pesanteur en chaque point (15).

Une droite fixe, la *verticale*, passe maintenant par le centre de l'espace. Autour de cette droite, l'observateur construit un système de coordonnées, opération purement géométrique à laquelle n'est nécessaire aucune autre observation que celle d'un point de repère quelconque et dont le choix reste perfectible : c'est le système des *coordonnées horizontales* (16).

La réalisation matérielle de ce système, pour la mesure des coordonnées (17), et la création, pour la mesure du temps, d'un mouvement qu'il puisse appeler uniforme, permettent à l'observateur de suivre avec méthode le déplacement de la direction de tout astre. Or, pour la très grande majorité des astres, — et le nom d'étoiles va leur être réservé, — le résultat est remarquable : c'est, par l'étude du mouvement diurne, la découverte de l'axe du monde et du jour sidéral (18). Maintenant peut être fixé ce qu'avait encore d'arbitraire le système de coordonnées (19) ; des observations suffisamment nombreuses d'une étoile vont permettre la détermination de l'axe du monde (20) ; toute question relative aux positions des étoiles pourra être résolue (21) ; et, de ce que l'axe du monde de tout point terrestre a une direction pratiquement indépendante de ce point, on concluera à la distance extrêmement grande des étoiles par rapport aux dimensions terrestres (22).

II. — Une deuxième droite fixe, l'axe du monde, passant ainsi par l'œil de l'observateur, celui-ci s'appuie sur elle pour construire un nouveau système de coordonnées : ce sont les *coordonnées équatoriales horaires* (23, 24), avec l'instrument qui les mesurent, l'équatorial (25).

III. — L'avantage du deuxième système sur le premier consiste en ce que l'une des coordonnées de chaque étoile y est, à l'approximation actuelle, indépendante du temps. Ceci indique la voie du progrès : il faudrait bâtir un nouveau système où les deux coordonnées de chaque étoile fussent invariables, de façon qu'on pût attribuer à chaque étoile deux nombres fixant sa position relativement aux autres. Il suffit pour cela, toujours à l'approximation actuelle, de prendre parmi les étoiles, et mobile avec elles, l'un des éléments du système de coordonnées jusqu'ici repéré sur la Terre et variable d'un lieu à un autre : ainsi sera établi le système des *coordonnées équatoriales stellaires* (26). Ce système est réalisé matériellement par l'équatorial à mouvement diurne (27), et voici l'horloge sidérale qui mesure ce mouvement (28). La relation qui réunit les coordonnées des deux systèmes équatoriaux et l'indication de l'horloge permet de ramener la plupart des déterminations astronomiques à des observations dans le plan du méridien (29).

Coordonnées géocentriques

I. — Les résultats acquis n'ont encore porté que sur les étoiles ; mais, précisément, c'est l'étude des autres astres qui semble devoir être la plus intéressante. En effet, dès ses premiers déplacements à la surface de la Terre, l'observateur aura remarqué l'indifférence des configurations stellaires à tout changement du lieu d'observation ; quant aux autres astres, au contraire, — le Soleil, la Lune et les astres errants, — ils doivent former comme une famille dont la Terre fasse partie. Cette remarque engage l'observateur à l'étude du monde qu'il habite, et une exploration devient nécessaire.

La symétrie, par rapport à la verticale, du cône des rayons visuels tangents à la surface de la mer témoigne de la sphéricité, au moins approximative, de celle-ci ; et la surface entière de la Terre n'a pas une forme moyennement bien différente (31, 32). L'observateur comprend l'intérêt qu'il y a à rapporter les

distances et les directions au point principal de cette sphère, à son centre. Dans la DEUXIÈME PARTIE de son étude, il construit donc un système de coordonnées autour de l'axe du monde relatif au CENTRE DE LA TERRE : le système des coordonnées équatoriales terrestres (33) dans lequel il apprend à déterminer la latitude (34) et la longitude (35) du point qu'il occupe ; et il transporte, par des corrections convenables, toute observation au nouveau point choisi pour centre de l'espace (36).

Quel est le rayon de la sphère terrestre (37)? Les mesures géodésiques donnent des résultats systématiquement variables avec la région où elles sont effectuées, et l'hypothèse trop simple de la sphéricité doit être abandonnée. L'hypothèse d'un ellipsoïde de révolution est satisfaisante (38, 39), et on ne gagne rien à vouloir considérer un ellipsoïde à trois axes inégaux (40).

Mais la précision croissante des observations fait découvrir l'influence de l'atmosphère terrestre sur la direction apparente des rayons lumineux (41). D'autre part, les grandes explorations permettent l'étude du magnétisme terrestre (42).

Pour fixer et transmettre la connaissance de la surface de la Terre, il faut la représenter sur une surface plane (43) : la Cartographie se constitue, et son étude scientifique est une application des théories géométriques sur la correspondance des surfaces.

Sachant maintenant la Terre isolée, l'observateur se fait une idée complète de l'ensemble du mouvement diurne autour du globe, et il trouve plus simple, plus commode, plus physiquement vrai d'y voir une apparence due à la rotation de la Terre par rapport à l'ensemble des étoiles (44).

II. — Tout est prêt pour l'étude des astres voisins, et d'abord du *Soleil*. — Le Soleil n'est pas une étoile. — Quelle est, dans la gerbe des directions stellaires, le mouvement de celle qu'il détermine avec le centre de la Terre (45) ? Elle décrit un plan d'un mouvement presque uniforme, en un temps marqué par le retour des saisons. Ce plan, l'écliptique, nouvel élément géométrique invariable, va apporter le dernier perfectionnement au système des coordonnées stellaires (46) et servir de base à un nouveau système de coordonnées, celui des coordonnées écliptiques (47-49).

Dans le plan de l'écliptique, quelle est la courbe que décrit le Soleil, en forme,

d'abord, et en orientation (50), puis en dimensions (51) par la connaissance de la parallaxe solaire ? Ces questions élucidées, le mouvement du Soleil est parfaitement connu, et il n'est pas de problème relatif à ce mouvement qui ne puisse être résolu (52, 53). Mais la confrontation des observations et des résultats de ces problèmes fait découvrir, à la longue, de petites variations de l'orbite solaire qui étaient d'abord, et heureusement, restées inaperçues (54).

La correspondance du mouvement solaire et du retour des saisons trahit comment la vie terrestre dépend entièrement du Soleil, et cet astre doit être longuement étudié (55) : on aura recours aux ressources les plus fines de la physique, et le spectroscope (56) fera connaître sa constitution, sa température, la pression qui règne à sa surface. Son influence sur la Terre est un phénomène périodique dont les périodes sont le jour (57, 58) et l'année, avec ses saisons météorologiques (59).

III. — Il ne sera plus possible, désormais, de se contenter de l'approximation à laquelle on s'est limité jusqu'ici. Le mouvement diurne lui-même, dont les lois étaient si simples et semblaient si certaines, présente des anomalies qui font découvrir de petits *déplacements de l'écliptique et de l'équateur* par rapport à l'ensemble des étoiles. Les approximations successives les décomposent en variations séculaires, qui constituent la précession (60), et en variations périodiques, qui sont le phénomène de la nutation (61). De plus, les latitudes terrestres cessent d'être constantes (62), d'une part à cause d'une légère oscillation de l'axe instantané de rotation de la Terre par rapport à celle-ci, d'autre part à cause d'un faible balancement de la verticale autour de la direction qui, en chaque point, lui avait été attribuée jusqu'ici comme invariable.

IV. — C'est sur le mouvement diurne que le temps a été mesuré dans les recherches précédentes. Mais ce mode de mesure est incommode, et, après que les idées ont été fixées sur ce que serait la mesure du temps par un astre quelconque (63), on comprend que l'observateur cherche à faire la *mesure du temps par le Soleil* (64) qui, par les alternatives des jours et des nuits, règle les occupations humaines. Mais le Soleil, tel quel, ne peut convenir : l'horloge qui serait réglée sur son mouvement ne le serait plus sur le mouvement diurne et un astre fictif, le Soleil moyen, doit lui être substitué ; ceci est sans difficulté

pourvu qu'on puisse, à chaque instant, passer de la position de l'un à la position de l'autre de ces deux astres (65).

L'application de ces principes aux usages civils requiert toute une organisation (66), la définition d'une heure légale, des ententes internationales. Depuis que nous connaissons les variations de l'orbite solaire et les déplacements des plans fondamentaux, la définition de l'année a perdu sa simplicité (67) ; cette définition précisée, la durée de l'année peut être mesurée (68, 69) et le calendrier construit (70).

Dans les voyages en mer, le temps se conserve par le chronomètre, et la lecture de celui-ci, lors d'une observation d'astre, est une donnée de plus au problème de la détermination du point (71, 72).

V. — Dans l'étude du mouvement de la *Lune*, l'observateur reprend la méthode qui lui a réussi pour le Soleil : la forme de l'orbite (73) et ses dimensions par la distance de l'astre à un instant quelconque (74), puis, en deuxième approximation, les déplacements du plan de l'orbite (75) considéré d'abord comme invariable. A l'année solaire correspond la révolution lunaire (76), avec ses différentes valeurs, suivant la définition qui la précise.

Astre sans éclat, la Lune ne nous envoie que des rayons solaires qui se réfléchissent sur sa surface, et l'étendue du fuseau lunaire éclairé et visible varie, d'une phase à l'autre (77), suivant la configuration de la Terre, du Soleil et de la Lune. Voisine de la Terre, la Lune s'étudie sans peine (78) et toute une partie de l'Astronomie, la Sélénographie, est vouée à la description de sa surface. — Les diverses configurations de la Terre, du Soleil et de la Lune président à d'autres phénomènes plus rares et plus frappants, les éclipses (79-82), soit que la Lune s'interpose entre la Terre et le Soleil, soit que la Terre porte ombre sur la Lune.

Coordonnées héliocentriques

I. — L'observateur a acquis des idées qui, pour le moment, le satisfont sur l'ensemble des étoiles, sur la Terre, sur le Soleil, sur la Lune. Mais quelques astres encore, les astres errants, semblent, dans leurs mouvements (83), échapper à toute loi. Il est tentant de vouloir les soumettre aux lois découvertes pour le Soleil et pour la Lune, mais il faut, à chaque progrès dans les moyens d'observation, superposer aux hypothèses de nouvelles hypothèses, jusqu'à ce qu'à l'hypothèse de la translation, par rapport aux étoiles, du Soleil autour de la Terre, soit substituée l'hypothèse de la translation de la Terre autour du Soleil (84). Est-ce une hypothèse invérifiable ? L'observateur maintient, pendant toute une année, la lunette dans une même direction équatoriale stellaire : dans le champ de la lunette, les étoiles décrivent une petite ellipse, et c'est bien la Terre qui tourne autour du Soleil. Mais il aura fallu que, dans cette étude, l'observateur se débarrasse d'une cause d'erreur due à ce que sa vitesse d'entraînement, avec la Terre, n'est pas négligeable vis-à-vis de la vitesse de la lumière (85).

Le point prépondérant dans l'étude de l'univers passe ainsi, dans une TROISIÈME PARTIE, du centre de la Terre au CENTRE DU SOLEIL. Alors tout s'explique : les astres errants, — planètes et comètes, — circulent, de même que la Terre, autour du Soleil : c'est le *système solaire ;* les lois des mouvements planétaires s'écrivent dans des formules sûres (86), et les six grandeurs invariables que renferment les formules relatives à chaque astre sont déterminées, avec une précision croissante, par les séries, constamment étendues, d'observations. Inversement, on retrouve comment, de la Terre, l'observateur doit voir les mouvements apparents des planètes avec cette complexité qui l'a arrêté pendant si longtemps (87), et dans lesquels il peut maintenant prévoir l'intéressant phénomène du passage de certaines planètes sur le disque du Soleil (88).

Dans cette famille d'astres que régit le Soleil et à laquelle la Terre appartient, chacun mérite une étude attentive, et des tableaux se dressent où s'inscrivent les mesures de toutes ses particularités (89). De plus, voici la découverte d'un immense anneau de centaines de petites planètes (90), et les lois qui lient toutes leurs orbites permettent de déduire la distance du Soleil à la Terre de la distance à la Terre de celui d'entre eux qui s'en approcherait assez

pour permettre des observations plus sûres que celles que l'on possède (91). — Enfin, l'étude des planètes fait découvrir, circulant autour de la plupart d'entre elles, des planètes de second ordre, les satellites (92) : les phases des satellites de l'un de ces groupes permettent une mesure de la vitesse de la lumière, d'où, inversement, une nouvelle mesure de la distance de la Terre au Soleil (93).

Au système solaire appartiennent encore les comètes (94), périodiques ou non, qui donnent lieu à des problèmes analogues de cinématique. Sans doute sont-ce des débris de comètes ces objets qui, traversant l'atmosphère terrestre, et y devenant lumineux, ont mérité le nom d'étoiles filantes (95)

II. — L'étude de l'univers ne peut se poursuivre que par un recours à la dynamique, appliquée par rapport à l'ensemble des étoiles (96). Par rapport à ce système la Terre tourne (97), et le calcul est facile des conséquences mécaniques de ce mouvement. Dans le système solaire, la différentiation des équations du mouvement fait apparaître une loi d'attraction universelle (98) ; inversement, pareille loi fait repasser les planètes, les comètes, les satellites par leurs positions observées, explique la précession, explique la nutation, permet de peser les planètes (99), donne une mesure nouvelle de la parallaxe solaire (100), rend compte des grands balancements semi-diurnes et diurnes de l'océan (101), et montre comment ces déformations de l'océan s'étendent à la terre ferme dont la rigidité est comparable à celle de l'acier (102).

III. — Mais tout ceci s'appuie sur l'invariabilité du solide stellaire. Cette hypothèse est-elle légitime ? L'observateur est donc ramené à l'étude des *étoiles* : il les classe d'après leur éclat (103) ; il les groupe en constellations (104). Les méthodes se perfectionnent ; les instruments s'affinent : des ellipses de parallaxe stellaire de plus en plus petites sont mesurées, et, par conséquent, les distances d'étoiles de plus en plus éloignées (105). — Cet extrême voisinage de deux, de trois étoiles n'est pas un effet de perspective : elles gravitent l'une autour de l'autre (106). — Le photomètre, mieux que l'œil, décèle les variations d'éclat. Dans telle constellation, une étoile nouvelle a brusquement apparu (107). — Des nuées lumineuses qui parsèment le Ciel, les unes se résolvent en étoiles au foyer des instruments puissants, mais d'autres restent rebelles (108). La spectroscopie, qui remonte du spectre à la nature de la source (109), démontre l'état gazeux de ces objets irrésolubles, les nébuleuses.

Le spectroscope témoigne aussi du mouvement radial de la source, et complète les observations en direction. Les étoiles ne forment pas le système indéformable que l'observateur avait pensé (110), et il faut modifier en conséquence la définition des axes de repère de l'étude dynamique de l'univers. Dans le mouvement apparent de chaque étoile, une composante est due à la translation du Soleil (111) : ce déplacement est considéré aujourd'hui comme rectiligne et uniforme. Le jour viendra peut-être où l'allure des courants stellaires fera découvrir un point à partir duquel il faudra construire de nouveaux systèmes de coordonnées pour une étude d'ensemble de l'univers dans lequel notre Soleil est une étoile.

Louvain, le 1er mai 1920. M. ALLIAUME.

ERRATA

page	*ligne* (1)	*au lieu de*	*il faut*
9	— 8	fx	$f'x$
30	11	sin B sin B	sin A sin B
32	11	cos δ′ cos φ	cos δ′ sin φ
32	— 6	cos δ′ sin φ	cos δ′ cos φ
76	6	$(\alpha\gamma)$	$(\alpha'\gamma)$
78	— 12	$\eta,$	$\xi, \eta,$
103	— 3	sin 2 φ	$\sin^2\varphi$
111	— 12	1514	1541
121	2	+ 0	= 0
126	5	coordonnées	coordonnés
148	— 7	$\frac{dS}{dt}$	$\frac{d\Sigma}{dt}$
302	— 4	) 2	) = 2
305	*en tête*	UNIVERTELLE	UNIVERSELLE
305	12	$\frac{d^2z}{dt^2} + \mu\frac{r-q}{r^3}$	$\frac{d^2r}{dt^2} + \mu\frac{r-q}{r^3}$
309	10	r	$r =$
311	— 8	V^2	$V^2 =$
338	— 8	procession	précession

(1) Le signe — indique une ligne comptée en remontant.

COURS D'ASTRONOMIE

PARTIE GÉNÉRALE ÉLÉMENTAIRE

PRÉLIMINAIRES

1. SEGMENTS ET ANGLES SUCCESSIFS

Segment rectiligne. — Un segment rectiligne AB est la figure formée par l'ensemble de deux points, A et B, considérés dans l'ordre où ils sont cités ; le point A, cité en premier lieu, s'appelle l'*origine* du segment ; l'autre point, B, est son *extrémité*. — La *grandeur* d'un segment rectiligne AB est le déplacement que doit effectuer un point mobile pour passer de l'origine A à l'extrémité B, le long de la droite déterminée par ces deux points.

Droite dirigée. — Une droite est dite *dirigée* lorsqu'on convient d'attribuer le signe positif à l'un de ses sens, et le signe négatif à l'autre.

Signe d'un segment rectiligne. — Un segment rectiligne AB, appartenant à une droite dirigée a, est positif ou négatif suivant que le point mobile allant de l'origine A à l'extrémité B, effectue ce déplacement dans le sens positif ou dans le sens négatif de la droite a.

Segments successifs. — On sait que si plusieurs segments rectilignes AB, BC, CD, ... KL, appartenant à une même droite

dirigée, sont tels que l'extrémité de chacun d'eux, sauf du dernier, est l'origine du suivant, la somme de ces segments est égale, en grandeur et en signe, au segment ayant pour origine l'origine A du premier et pour extrémité l'extrémité L du dernier :

$$AB + BC + CD + \cdots + KL = AL.$$

En particulier, cette somme est nulle si l'extrémité L du dernier segment se confond avec l'origine A du premier.

On connaît aussi les propositions élémentaires relatives à la projection d'un segment sur une droite dirigée, aux contours polygonaux, et à la projection d'un contour polygonal sur une droite dirigée.

Angle. — Un angle (ab) est la figure formée par l'ensemble de deux droites dirigées a et b, passant par un même point, et considérées dans l'ordre où elles sont citées ; la droite dirigée a, citée en premier lieu, est l'*origine* de l'angle ; l'autre droite dirigée, b, est son *extrémité*. — La *grandeur* d'un angle (ab), formé par les deux droites dirigées a et b passant par le point O, est l'un quelconque des déplacements que peut effectuer une droite dirigée mobile, passant constamment par le point O, et d'abord confondue avec l'origine a, pour venir se confondre avec l'extrémité b, sans quitter le plan déterminé par ces deux droites.

Plan orienté. — On dit qu'un plan est *orienté* lorsqu'on convient d'attribuer le signe positif à l'un des sens de rotation autour de chacun de ses points, et le signe négatif à l'autre.

Signe d'un angle. — Un angle (ab), appartenant à un plan orienté α, est positif ou négatif suivant que la droite dirigée mobile tournant de l'origine a à l'extrémité b, effectue cette rotation dans le sens positif ou dans le sens négatif du plan α. Il résulte de cette définition que tous les angles de même signe représentés par la notation (ab) diffèrent l'un de l'autre d'un nombre entier de tours complets, positifs ou négatifs.

Angles successifs. — On sait que si plusieurs angles, (ab), (bc), (cd), ... (kl), appartenant à un même plan orienté, sont tels que l'extrémité de chacun d'eux, sauf du dernier, est l'origine du suivant, la somme de ces angles est égale, en grandeur et en signe, et à un nombre entier de tours complets près, à un angle ayant pour origine l'origine a du premier et pour extrémité l'extrémité l du dernier :

$$(ab) + (bc) + (cd) + \cdots + (kl) = (al) + k \text{ tours complets},$$

k étant un nombre entier positif, nul ou négatif.

En particulier, cette somme se réduit à un nombre entier de tours complets si l'extrémité l du dernier angle se confond avec l'origine a du premier.

Tout angle n'étant défini qu'à un nombre entier de tours complets près, il arrive souvent, dans les égalités entre angles, que l'on néglige d'écrire le terme

$$k \text{ tours complets}.$$

Nous rencontrerons des égalités dans lesquelles entreront des angles appartenant au même plan géométrique, mais orienté positivement dans un sens pour certains angles et dans l'autre sens pour d'autres angles. Nous indiquerons alors cette différence de sens par une flèche placée au-dessus de la notation de l'angle. Ainsi, l'angle

$$\overrightarrow{(ab)}$$

est parcouru positivement par une droite dirigée, de son origine a à son extrémité b, dans le sens du mouvement des aiguilles de montre ; l'angle

$$\overleftarrow{(ab)}$$

est parcouru positivement dans le sens inverse ; et

$$\overleftarrow{(ab)} = -\overrightarrow{(ab)}.$$

2. UNITÉS DE MESURE DES ANGLES

Degré. — On sait que les mesures d'angles s'expriment le plus souvent en prenant pour unité le *degré* ou 1 : 360 de tour complet, 1 : 90 d'angle droit ; le degré se divise en 60 *minutes* (de degré ou d'arc) ; la minute en 60 *secondes* (de degré ou d'arc) ; et la seconde se divise décimalement : par exemple

$$73^\circ\,29'\,43'',3.$$

Grade. — A la division des angles en degrés, les topographes préfèrent souvent la division en *grades* : le grade est 1 : 400 de tour complet, 1 : 100 d'angle droit ; il se divise décimalement : un dixième, un centième de grade s'appelle un *décigrade*, un *centigrade*,...

Heure. — Les astronomes évaluent aussi les angles en *heures* : une heure est 1 : 24 de tour complet, 1 : 6 d'angle droit ; elle se divise en 60 *minutes* (d'heure ou de temps) ; la minute en 60 *secondes* (d'heure ou de temps) ; et la seconde se divise décimalement : par exemple

$$4^{h}\,39^{m}\,16^{s},7.$$

Radian. — L'unité d'angle employée en mathématiques est le *radian* : c'est l'angle moindre qu'un demi-tour complet qui intercepterait un arc de longueur égale à celle du rayon sur une circonférence quelconque décrite de son sommet pour centre. Le tour complet, en radians, a pour mesure 2π, et l'angle droit $\pi : 2$. C'est avec le radian pour unité d'angle que la longueur d'un arc de circonférence s'exprime par le produit de la mesure du rayon et de la mesure de l'angle au centre. Les formules habituelles de dérivation, de développement en séries des fonctions angulaires, etc., ne sont valables qu'avec le radian pour unité d'angle. Soit, par exemple, à appliquer l'égalité

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

au développement en série de sin 4′. Il faut exprimer l'angle de 4′ au moyen du radian,

$$x = 4 \cdot \frac{2\pi}{360.60} = \frac{\pi}{45.60};$$

et substituer dans la formule rappelée :

$$\sin 4' = \frac{\pi}{45.60} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{45.60}\right)^3 + \frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{45.60}\right)^5 + \dots \quad (1)$$

Changement d'unité. — La mesure d'un angle étant donnée, le calcul de la mesure de ce même angle au moyen d'une autre unité ne présente aucune difficulté : c'est ainsi que nous venons, par une proportion, d'exprimer un angle de 4′ au moyen du radian (2).

Divers recueils renferment des tables pour la conversion des divisions sexagésimales en divisions centésimales, et inversement.

La remarque suivante simplifie la conversion des degrés en heures, et inversement. Le degré, la minute de degré, la seconde de degré sont quinze fois moindres que l'heure, la minute d'heure, la seconde d'heure, respectivement ; de sorte que, par exemple, l'angle

$$73^\circ\,29'\,43'',3$$

a pour mesure en heures

$$\frac{73^h\,29^m\,43^s,3}{15} = 4^h\,39^m\,16^s,7.$$

---

(1) Signalons encore une unité d'angle employée par les artilleurs. Le *millième d'artillerie* est (1 : 1600) d'angle droit ; sa tangente est à très peu près égale à 0,001 ; et sa valeur en grade est 0,0625.

(2) Dans la pratique, on emploie les relations suivantes, d'autant plus exactes que l'unité nouvelle est moindre :

$$\alpha \text{ en minutes} = \frac{\alpha \text{ en radians}}{\sin 1'}.$$

$$\alpha \text{ en secondes} = \frac{\alpha \text{ en radians}}{\sin 1''}.$$

Inversement, pour la même raison, l'angle

$$4^h\,39^m\,16^s,7$$

a pour mesure en degrés

$$4°\,39'\,16'',7 \times 15 = 73°\,29'\,43'',3.$$

Exprimée en degrés, la valeur du radian est le nombre irrationnel $\left(\frac{360}{2\pi}\right)°$; elle est comprise entre $57°\,17'$ et $57°\,18'$. De même, exprimée en heures, la valeur du radian est le nombre irrationnel $\left(\frac{24}{2\pi}\right)^h$; elle est comprise entre $3^h\,49^m$ et $3^h\,50^m$.

3. LA MESURE DES GRANDEURS

Mesurer une grandeur représentée par le symbole a, c'est chercher deux nombres α et ϵ ($\epsilon > 0$) vérifiant les inégalités

$$\alpha - \epsilon \leqslant a \leqslant \alpha + \epsilon,$$

dans lesquelles α et ϵ sont exprimés au moyen de l'unité choisie pour a.

On dit que α est une mesure de a faite *à* ϵ *unités près*, ou avec une *approximation* égale à ϵ.

De deux mesures, (α, ϵ) et (α', ϵ'), d'une même grandeur a,

$$\alpha - \epsilon \leqslant a \leqslant \alpha + \epsilon,$$

$$\alpha' - \epsilon' \leqslant a \leqslant \alpha' + \epsilon',$$

on dit que la seconde est meilleure que la première, si

$$\epsilon' < \epsilon.$$

Un instrument propre à la mesure de a étant donné, on s'efforce, en principe, de rendre l'approximation ϵ aussi petite que possible.

Apporter un perfectionnement à un instrument, c'est le rendre apte à faire des mesures où l'approximation ϵ soit moindre qu'auparavant.

Plusieurs déterminations soignées d'un même groupe de grandeurs, comme les coordonnées polaires d'une direction, faites soit par l'observation directe, soit au moyen de calculs dont les données résultent d'observations, conduisent toujours à des résultats différents. La THÉORIE DES ERREURS a pour objet de fixer les meilleures valeurs des grandeurs étudiées et leurs approximations.

4. DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES

Fonction d'une variable. — Considérons d'abord une fonction connue z d'une seule variable réelle x :

$$z = f(x).$$

Soit x_0 une valeur déterminée de la variable. Posons

$$x = x_0 + h.$$

Supposons que l'on puisse, sans inconvénient, commettre dans le calcul de

$$z = f(x_0 + h)$$

une erreur ne surpassant pas en valeur absolue une quantité positive ϵ donnée à l'avance.

Le développement de $f(x_0 + h)$ suivant les puissances croissantes de h permet d'écrire

$$z = f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{1}{2}h^2 f''(x_0 + \theta h),$$

où θ est une quantité inconnue comprise entre 0 et 1.

Par hypothèse, on peut se contenter d'écrire

$$z = f(x_0) + hf'(x_0)$$

pour toute valeur de h satisfaisant aux conditions

$$-2\epsilon \leqslant h^2 f''(x_0 + \theta h) \leqslant 2\epsilon.$$

Dans les applications, les circonstances sont habituellement telles qu'on peut aussi bien imposer à h de satisfaire aux conditions

$$-2\epsilon \leqslant h^2 f''(x_0) \leqslant +2\epsilon.$$

h étant réel, ces deux conditions se réduisent à une seule, la première ou la seconde suivant que $f''(x_0)$ est négatif ou positif. Supposons, par exemple, que $f''(x_0)$ soit positif. L'intervalle des valeurs admissibles de h a pour limite inférieure

$$-\sqrt{\frac{2\epsilon}{f''(x_0)}}$$

et pour limite supérieure

$$+\sqrt{\frac{2\epsilon}{f''(x_0)}}.$$

Autrement dit, pour toute valeur de x appartenant à l'intervalle

$$\left(x_0 - \sqrt{\frac{2\epsilon}{f''(x_0)}},\ x_0 + \sqrt{\frac{2\epsilon}{f''(x_0)}}\right),$$

limites comprises, on pourra, dans le calcul de z en fonction de x, se contenter d'écrire

$$z = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0),$$

c'est-à-dire considérer z comme une fonction linéaire de x.

Fonction de plusieurs variables. — Ces considérations s'étendent au cas d'une fonction de plusieurs variables réelles. Soient, par exemple, une fonction connue z de deux variables réelles x et y,

$$z = f(x, y),$$

et x_0, y_0 des valeurs déterminées de ces variables. Posons

$$x = x_0 + h, \qquad y = y_0 + k.$$

Admettons que l'on puisse, sans inconvénient, commettre dans le calcul de

$$z = f(x_0 + h,\ y_0 + k)$$

une erreur ne surpassant pas en valeur absolue une quantité ϵ donnée à l'avance.

Le développement de $f(x_0 + h, y_0 + k)$ suivant les puissances croissantes de h et de k permet d'écrire

$$z = f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + hf'_x(x_0, y_0) + kf'_y(x_0, y_0)$$
$$+ \frac{1}{2}h^2 f''_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + hkf''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$$
$$+ \frac{1}{2}k^2 f''_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k),$$

où θ est une quantité inconnue comprise entre 0 et 1.

Par hypothèse, on peut se contenter d'écrire

$$z = f(x_0, y_0) + hf'_x(x_0, y_0) + kf'_y(x_0, y_0)$$

pour tout groupe de valeurs de h et de k satisfaisant aux conditions

$$-2\epsilon \leqslant h^2 f''_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + 2hkf''_{xy}(\ldots,\ldots)$$
$$+ k^2 f''_{yy}(\ldots,\ldots) \leqslant +2\epsilon,$$

ou, dans les applications, à très peu près,

$$-2\epsilon \leqslant h^2 f''_{xx}(x_0, y_0) + 2hkf''_{xy}(x_0, y_0) + k^2 f''_{yy}(x_0, y_0) \leqslant +2\epsilon.$$

En d'autres termes, on peut, dans le calcul de z en fonction de x et de y, écrire

$$z = f(x_0, y_0) \quad (x - x_0)f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f'_y(x_0, y_0),$$

c'est-à-dire considérer z comme une fonction linéaire de x et de y, pour tout couple (x, y) satisfaisant à

$$-2\epsilon \leqslant (x - x_0)^2 f''_{xx}(x_0, y_0) + 2(x - x_0)(y - y_0)f''_{xy}(x_0, y_0)$$
$$+ (y - y_0)^2 f''_{yy}(x_0, y_0) \leqslant +2\epsilon.$$

Si, en vue d'une interprétation géométrique, nous considérons en même temps la surface qui a pour équation

$$z = f(x, y),$$

nous voyons que nous pouvons, à l'approximation actuelle, substituer à cette surface son plan tangent au point (x_0, y_0), en tout point (x, y) non extérieur au domaine limité par les deux coniques

$$(x - x_0)^2 f''_{xx}(x_0, y_0) + 2(x - x_0)(y - y_0) f''_{xy}(x_0, y_0) + (y - y_0)^2 f''_{yy}(x_0, y_0) = \pm 2\epsilon,$$

dont le point (x_0, y_0) est un centre commun.

1° Si, au point (x_0, y_0), le binôme

$$f''^2_{xy} - f''_{xx} \cdot f''_{yy}$$

est négatif, ces deux coniques sont des ellipses dont une seule est réelle.

2° Si ce binôme est nul, l'une des coniques est une parabole réduite à deux droites parallèles, et l'autre est imaginaire.

3° Si ce binôme est positif, ces deux coniques sont des hyperboles conjuguées.

Ce domaine du plan xy est limité par la projection sur ce plan d'une indicatrice des courbures de la surface $z = f(x, y)$ et relative au point (x_0, y_0) de cette surface.

On ne pourra pas oublier que ce domaine a été délimité en supposant $\theta = 0$, et, plus particulièrement dans chacun des deux derniers cas, ce n'est que prudemment qu'on s'éloignera du centre dans une direction à peu près asymptotique.

5. FONCTIONS EXPÉRIMENTALES FONCTIONS TABULAIRES. INTERPOLATION

Il arrive souvent qu'une variable y est fonction d'une autre variable x sans que la théorie puisse établir la forme de cette fonction. On se donne alors une certaine approximation, et on a recours à l'observation ou à l'expérience pour calculer les coefficients d'une fonction dont la forme soit aussi simple que possible et compatible avec l'approximation imposée. Écrivons d'abord la fonction linéaire

$$y = a_0 + a_1 x ;$$

si nous pouvons déterminer des valeurs numériques des coefficients a_0 et a_1 de manière qu'*à l'approximation donnée* les valeurs calculées et observées de y se confondent, nous nous arrêtons à la forme linéaire de la fonction. Sinon, nous nous voyons contraints de passer à la fonction du second degré

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 ;$$

s'il existe des valeurs numériques des coefficients a_0, a_1, a_2 telles que chacun des y calculés et chacun des y observés se confondent à l'approximation donnée, la fonction du second degré est satisfaisante. Sinon, nous devons essayer une fonction du troisième degré, et ainsi de suite. — C'est la THÉORIE DES ERREURS qui enseigne la détermination des coefficients.

Il arrive aussi fréquemment que la fonction soit connue théoriquement, mais compliquée au point que le calcul de sa valeur correspondant à une seule valeur de la variable demanderait déjà un temps considérable. Ce calcul est fait alors une fois pour toutes, pour des valeurs suffisamment rapprochées de la variable, et les résultats de ces calculs sont *mis en table :* c'est le cas en particulier de la fonction *logarithme décimal,* définie par l'équation

$$10^y = x.$$

Le calcul des valeurs de la fonction correspondant à d'autres valeurs de la variable se fait par *interpolation.* — Plaçons nous dans le cas usuel où les valeurs tabulaires de la variable sont équidistantes, et soit à intercaler dans la suite

$$\ldots, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, \ldots$$

des valeurs tabulaires de la variable une valeur x ; et d'abord

$$x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}.$$

Posons

$$h = x_{i+1} - x_i = x_{i+2} - x_{i+1} = \cdots$$

et

$$\Delta_i = f(x_{i+1}) - f(x_i),$$

$$\Delta_i^2 = \Delta_{i+1} - \Delta_i,$$

$$\Delta_{i+1} = f(x_{i+2}) - f(x_{i+1}), \qquad \Delta_i^3 = \Delta_{i+1}^2 - \Delta_i^2.$$

$$\Delta_{i+1}^2 = \Delta_{i+2} - \Delta_{i+1},$$

$$\Delta_{i+2} = f(x_{i+3}) - f(x_{i+2}),$$

La fonction linéaire satisfaisant aux données tabulaires x_i, x_{i+1} est

$$f(x) = f(x_i) + (x - x_i)\frac{\Delta_i}{h};$$

la fonction du second degré satisfaisant aux données tabulaires x_i, x_{i+1}, x_{i+2} est

$$f(x) = f(x_i) + (x - x_i)\frac{\Delta_i}{h} + (x - x_i)(x - x_{i+1})\frac{\Delta_i^2}{h^2},$$

et ainsi de suite :

$$f(x) = f(x_i) + (x - x_i)\frac{\Delta_i}{h} + (x - x_i)(x - x_{i+1})\frac{\Delta_i^2}{h^2}$$

$$+ (x - x_i)(x - x_{i+1})(x - x_{i+2})\frac{\Delta_i^3}{h^3}, \ldots$$

L'interpolation est d'autant plus satisfaisante qu'on substitue à la fonction tabulaire une fonction entière et rationnelle de degré plus élevé. Cette opération équivaut à remplacer la courbe représentative de la fonction tabulaire par une droite passant par les deux points dont les abscisses sont les valeurs tabulaires de la variable voisines de la valeur proposée, ou par une courbe parabolique dont la direction asymptotique est celle de l'axe des $f(x)$ et passant par autant de points voisins de la courbe tabulaire qu'il y a d'unités dans le degré de la courbe adoptée.

6. COORDONNÉES D'UNE DIRECTION

Axes coordonnés. — Par le point quelconque O de l'espace faisons passer trois droites dirigées telles que chacune soit perpendiculaire au plan des deux autres ; et appelons ces trois droites axe X, axe Y, axe Z.

Le système d'axes rectangulaires OXYZ ainsi formé est dit *rétrograde* (droitier) ou *direct* (gaucher) suivant qu'un observateur debout sur le plan XY, la tête vers la partie positive de l'axe Z, et regardant dans la direction positive de l'axe X, a la direction positive de l'axe Y à sa droite ou à sa gauche.

Coordonnées polaires d'une direction. — Par l'origine O du système d'axes rectangulaires OXYZ, faisons passer une droite

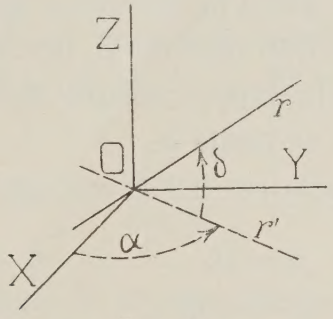

FIG. 1.

dirigée quelconque r (fig. 1). Les coordonnées polaires de cette direction r issue de l'origine sont les angles définis, à un nombre entier de tours complets près, par les propositions suivantes :

1° L'angle α, dit *angle de position,* ayant pour origine l'axe X, pour extrémité la projection r' sur le plan XY de la droite dirigée considérée, et compté positivement dans un sens tel que l'axe Y ait un angle de position égal à *plus un angle droit.*

2° L'angle δ, dit *angle de pente,* ayant pour origine la projection r' sur le plan XY de la droite dirigée considérée, et compté dans un sens tel que l'axe Z ait un angle de pente égal à *plus un angle droit.*

Mais la droite dirigée r se projette sur le plan XY aussi bien suivant la droite dirigée r' que suivant la droite dirigée r'' directement opposée. Ainsi, à toute direction r correspondent deux groupes de coordonnées polaires, (α', δ') et (α'', δ''), avec les relations

$$\alpha'' - \alpha' = 2\ dr., \quad \delta'' + \delta' = 2\ dr.$$

Sauf stipulation contraire, on a l'habitude de diriger la projection de r de manière que la valeur absolue de l'angle de pente ne surpasse pas un droit.

Le lieu géométrique des droites dirigées ayant même angle de position est un plan passant par l'axe Z. Le lieu géométrique des droites dirigées ayant même angle de pente est un cône de révolution autour de l'axe Z.

Une droite dirigée r issue de l'origine est parfaitement déterminée par son angle de position α et son angle de pente δ. En effet, la demi-droite qui a la direction positive de r est l'intersection du demi-plan issu de l'axe Z, lieu des demi-droites d'angle de position α, et de la nappe conique issue de l'origine, lieu des demi-droites d'angle de pente δ.

Les coordonnées polaires des axes coordonnés sont :

axe X,	$\alpha = 0$,	$\delta = 0$;
axe Y,	$\alpha = 1\ dr.$,	$\delta = 0$;
axe Z,	α indéterminé,	$\delta = 1\ dr.$;

dans toute relation entre α et δ, α devra disparaître lorsqu'on fera $\delta = \pm 1\ dr.$

Une droite dirigée ayant pour coordonnées polaires α et δ ; la droite dirigée directement opposée a pour coordonnées polaires

$$\alpha_1 = \alpha + 2\ dr, \quad \delta_1 = -\delta.$$

Les coordonnées polaires d'une droite dirigée ne passant pas par l'origine sont celles de la droite dirigée parallèle passant par l'origine. Sa détermination exige, en outre, la connaissance d'un de ses points.

Cosinus directeurs. — On sait que, dans bien des questions théoriques, on introduit une plus grande symétrie dans les égalités en caractérisant chaque direction par ses *cosinus directeurs :* ce sont les cosinus des angles que fait cette direction avec celles des trois axes coordonnés ; la somme de leurs carrés est égale à l'unité.

Des *paramètres directeurs* d'une direction sont trois nombres proportionnels aux cosinus directeurs de cette direction.

Si deux directions sont directement opposées, leurs cosinus directeurs ont deux à deux la même valeur absolue et des signes contraires.

Si (α, δ) sont les coordonnées polaires d'une direction, les cosinus directeurs (a, b, c) de celle-ci sont :

$$a = \cos\alpha \cos\delta,$$
$$b = \sin\alpha \cos\delta,$$
$$c = \sin\delta.$$

Inversement, si (a, b, c) sont les cosinus directeurs d'une direction, les coordonnées polaires (α, δ) correspondantes sont données par

$$\sin\delta = c, \qquad \sin\alpha = \frac{b}{\cos\delta}, \qquad \cos\alpha = \frac{a}{\cos\delta}.$$

Plus généralement, si (a, b, c) sont des paramètres directeurs d'une direction, les coordonnées polaires correspondantes (α, δ) résultent de

$$\frac{\cos\alpha\cos\delta}{a} = \frac{\sin\alpha\cos\delta}{b} = \frac{\sin\delta}{c} = \frac{\pm 1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

et sont données par

$$\cos\alpha = \frac{\pm a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{\pm b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\delta = \frac{\pm c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Des paramètres directeurs définissent une droite déterminée parmi les droites passant par un point, sans distinguer l'une de l'autre les deux directions de cette droite.

Angle de deux directions. — L'angle V de deux directions dont les cosinus directeurs sont (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) se calcule au moyen de l'égalité connue

$$\cos V = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2.$$

Exprimant les cosinus directeurs en fonction des coordonnées polaires (α_1, δ_1) et (α_2, δ_2) de ces deux directions, on obtient

$$\cos V = \sin \delta_1 \sin \delta_2 + \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos (\alpha_1 - \alpha_2).$$

7. LE CONE ET LE PLAN

Équation d'un cône dont le sommet est à l'origine. — Un cône dont le sommet est à l'origine est parfaitement défini par une direction (α_0, δ_0) de son axe et par sa demi-ouverture V comptée à partir de cette direction : c'est le lieu des droites faisant l'angle V avec la direction (α_0, δ_0). En notant (α, δ) les coordonnées polaires courantes de l'une quelconque de ses génératrices, l'équation de ce cône est donc

$$\sin \delta_0 \sin \delta + \cos \delta_0 \cos \delta \cos (\alpha_0 - \alpha) = \cos V,$$

ou

$$\cos \alpha_0 \cos \delta_0 \cos \alpha + \sin \alpha_0 \cos \delta_0 \sin \alpha + \sin \delta_0 \operatorname{tg} \delta = \cos V \operatorname{séc} \delta,$$

équation de la forme

$$a \cos \alpha + b \sin \alpha + c \operatorname{tg} \delta = d \operatorname{séc} \delta.$$

Recherche de l'axe et de l'ouverture. — *On donne l'équation*

$$a \cos \alpha + b \sin \alpha + c \operatorname{tg} \delta = d \operatorname{séc} \delta$$

d'un cône issu de l'origine. Quelles sont les coordonnées $(\alpha_0 \ \delta_0)$ *de l'axe et la demi-ouverture* V *de ce cône ?*

Par identification,

$$\frac{a}{\cos \alpha_0 \cos \delta_0} = \frac{b}{\sin \alpha_0 \cos \delta_0} = \frac{c}{\sin \delta_0} = \frac{d}{\cos V}.$$

On voit que (a, b, c) sont des paramètres directeurs de l'axe ; on en déduira les coordonnées polaires (α_0, δ_0).

De plus, les équations ci-dessus permettent d'écrire

$$\frac{d}{\cos V} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{\pm 1},$$

d'où

$$\cos V = \frac{\pm d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Cône déterminé par trois directions. — *Quelle est l'équation du cône dont le sommet est à l'origine et dont trois génératrices ont les directions* (α_1, δ_1), (α_2, δ_2), (α_3, δ_3) *?*

L'équation

$$a \cos \alpha + b \sin \alpha + c \operatorname{tg} \delta = d \operatorname{séc} \delta$$

de ce cône doit être satisfaite par (α_1, δ_1), (α_2, δ_2) et (α_3, δ_3) :

$$\begin{aligned} a \cos \alpha_1 + b \sin \alpha_1 + c \operatorname{tg} \delta_1 &= d \operatorname{séc} \delta_1, \\ a \cos \alpha_2 + b \sin \alpha_2 + c \operatorname{tg} \delta_2 &= d \operatorname{séc} \delta_2, \\ a \cos \alpha_3 + b \sin \alpha_3 + c \operatorname{tg} \delta_3 &= d \operatorname{séc} \delta_3. \end{aligned}$$

L'élimination de a, b, c, d laisse l'équation demandée :

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & \operatorname{tg} \delta & \operatorname{séc} \delta \\ \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 & \operatorname{tg} \delta_1 & \operatorname{séc} \delta_1 \\ \cos \alpha_2 & \sin \alpha_2 & \operatorname{tg} \delta_2 & \operatorname{séc} \delta_2 \\ \cos \alpha_3 & \sin \alpha_3 & \operatorname{tg} \delta_3 & \operatorname{séc} \delta_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Intersection de deux cônes. — *Quelles sont les coordonnées* (α, δ) *des deux droites d'intersection des deux cônes*

$$\begin{aligned} a_1 \cos \alpha + b_1 \sin \alpha + c_1 \operatorname{tg} \delta &= d_1 \operatorname{séc} \delta, \\ a_2 \cos \alpha + b_2 \sin \alpha + c_2 \operatorname{tg} \delta &= d_2 \operatorname{séc} \delta \, ? \end{aligned}$$

Pour éliminer δ, résolvons ces équations par rapport à séc δ et tg δ, et substituons dans l'identité

$$\operatorname{séc}^2 \delta - \operatorname{tg}^2 \delta = 1.$$

Pour simplifier les écritures, formons le tableau

$$\begin{array}{cccc} 1) & 2) & 3) & 4) \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{array}$$

dont les colonnes sont numérotées 1, 2, 3, 4. Ces colonnes prises deux à deux forment 12 déterminants, deux à deux égaux et de signes contraires. Notons

$$\Delta_{mn}$$

le déterminant composé de la colonne m suivie de la colonne n. L'élimination de δ laisse alors l'équation

$$(\Delta_{13}\cos\alpha + \Delta_{23}\sin\alpha)^2 - (\Delta_{14}\cos\alpha + \Delta_{24}\sin\alpha)^2 = \Delta_{34}^2$$

d'où l'on tirera facilement tg α, sous deux valeurs réelles ou imaginaires.

Pour éliminer α, résolvons le système proposé par rapport à sin α et cos α, et substituons dans l'identité

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Nous obtenons l'équation

$$(\Delta_{13}\sin\delta - \Delta_{14})^2 + (\Delta_{23}\sin\delta - \Delta_{24})^2 = \Delta_{12}^2$$

du second degré en sin δ, et dont la résolution se fait sans difficulté.

La condition de réalité des racines tg α et sin δ de ces deux équations s'interprète facilement : il faut et il suffit que la distance angulaire des axes des deux cônes ne soit pas plus grande que la somme de leurs demi-ouvertures.

Équation d'un plan passant par l'origine. — Dans le cas particulier où $V = 1\ dr.$ ($\cos V = 0$), le cône se réduit à un plan. Ainsi, le plan passant par l'origine et dont les coordonnées polaires de la normale sont (α_0, δ_0) a pour équation

$$\sin\delta_0\sin\delta + \cos\delta_0\cos\delta\cos(\alpha_0 - \alpha) = 0$$

ou

$$\operatorname{tg}\delta_0\operatorname{tg}\delta + \cos(\alpha_0 - \alpha) = 0$$

ou

$$\cos\alpha_0 \cos\alpha + \sin\alpha_0 \sin\alpha + \operatorname{tg}\delta_0 \operatorname{tg}\delta = 0,$$

équation de la forme

$$a\cos\alpha + b\sin\alpha + c\operatorname{tg}\delta = 0.$$

Les cosinus directeurs de la normale sont proportionnels à (a, b, c).

Les droites d'intersection des deux cônes proposés au problème précédent appartiennent au plan

$$\Delta_{14}\cos\alpha + \Delta_{24}\sin\alpha + \Delta_{34}\operatorname{tg}\delta = 0$$

dont l'équation résulte de l'élimination de séc δ entre les équations de ces deux cônes.

Angle de deux plans. — *Quel est l'angle des deux plans*

$$a_1\cos\alpha + b_1\sin\alpha + c_1\operatorname{tg}\delta = 0,$$
$$a_2\cos\alpha + b_2\sin\alpha + c_2\operatorname{tg}\delta = 0\ ?$$

Il est égal à l'angle de leurs normales, et celui-ci a pour cosinus

$$\pm\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Plan déterminé par deux directions. — *Quelle est l'équation du plan passant par l'origine et déterminé par deux directions* (α_1, δ_1), (α_2, δ_2) *?*

L'équation

$$a\cos\alpha + b\sin\alpha + c\operatorname{tg}\delta = 0$$

de ce plan doit être satisfaite par (α_1, δ_1) et (α_2, δ_2) :

$$a\cos\alpha_1 + b\sin\alpha_1 + c\operatorname{tg}\delta_1 = 0,$$
$$a\cos\alpha_2 + b\sin\alpha_2 + c\operatorname{tg}\delta_2 = 0.$$

L'élimination de a, b, c laisse l'équation demandée :

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & \operatorname{tg}\delta \\ \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 & \operatorname{tg}\delta_1 \\ \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2 & \operatorname{tg}\delta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Intersection d'un cône et d'un plan. — Les équations en α et δ, coordonnées des intersections de deux cônes, subsistent dans le cas particulier où l'un des cônes se réduit à un plan, par exemple lorsque

$$d_2 = 0.$$

Chaque déterminant dont un indice est 4 a l'un de ses termes qui s'annule.

Intersection de deux plans. — Appliquons aux plans

$$a_1 \cos\alpha + b_1 \sin\alpha + c_1 \operatorname{tg}\delta = 0,$$
$$a_2 \cos\alpha + b_2 \sin\alpha + c_2 \operatorname{tg}\delta = 0$$

les équations relatives à l'intersection de deux cônes. Ici

$$d_1 = 0, \quad d_2 = 0,$$

et le système à huit éléments s'écrit

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \end{matrix} \right\|$$

Les déterminants

$$\Delta_{14}, \qquad \Delta_{24}, \qquad \Delta_{34}$$

s'annulent, et les équations se réduisent à

$$\Delta_{13} \cos\alpha + \Delta_{23} \sin\alpha = 0,$$
$$\sin^2\delta\,(\Delta_{13}^2 + \Delta_{23}^2) = \Delta_{12}^2,$$

d'où

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\Delta_{13}}{\Delta_{23}}, \qquad \sin\delta = \pm\frac{\Delta_{12}}{\sqrt{\Delta_{13}^2 + \Delta_{23}^2}}.$$

Par exemple, les deux plans

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha + \sin\alpha_1 \sin\alpha + \operatorname{tg}\delta_1 \operatorname{tg}\delta = 0,$$
$$\cos\alpha_2 \cos\alpha + \sin\alpha_2 \sin\alpha + \operatorname{tg}\delta_2 \operatorname{tg}\delta = 0$$

se coupent suivant la droite

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\cos\alpha_1 \operatorname{tg}\delta_2 - \cos\alpha_2 \operatorname{tg}\delta_1}{\sin\alpha_1 \operatorname{tg}\delta_2 - \sin\alpha_2 \operatorname{tg}\delta_1},$$

$$\sin \delta = \pm \frac{\sin (\alpha_2 - \alpha_1)}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \delta_1 + \operatorname{tg}^2 \delta_2 - 2 \operatorname{tg} \delta_1 \operatorname{tg} \delta_2 \cos (\alpha_1 - \alpha_2)}}.$$

Les résultats relatifs à l'intersection de deux plans se retrouvent facilement en partant des équations telles quelles de ces plans, indépendamment des intersections de deux cônes.

8. LA SPHÈRE CÉLESTE

Des anciennes idées sur la constitution de l'univers, on a gardé l'habitude de considérer les intersections des éléments géométriques issus de l'origine des coordonnées avec une sphère ayant cette origine pour centre et de rayon quelconque : c'est la *sphère céleste*.

A une direction issue de l'origine correspond ainsi le point de la sphère appartenant à cette direction ; aux directions positives des génératrices dirigées d'un cône issu de l'origine correspond un petit cercle dont les pôles se trouvent sur l'axe du cône ; à un plan passant par l'origine correspond un grand cercle dont les pôles appartiennent au diamètre normal à ce plan.

A toute figure dont les éléments sont des directions issues de l'origine peut ainsi se substituer une image à deux dimensions, qui est sa projection centrale sur la surface sphérique ; les grandeurs angulaires de la figure de l'espace ont mêmes mesures que les arcs correspondants de la figure sphérique.

9. COORDONNÉES POLAIRES DU POINT

Par rapport aux axes rectangulaires OXYZ, les *coordonnées polaires ordinaires* d'un point M sont :

1°) et 2°) l'*angle de position* α et l'*angle de pente* δ de la droite dirigée passant par l'origine O, sur laquelle le segment OM est positif ;

3°) ce segment positif $OM = \rho$, dit *rayon vecteur*.

Par rapport aux mêmes axes, les *coordonnées polaires extraordinaires* du point M sont :

1°) et 2°) l'*angle de position* α et l'*angle de pente* δ de la droite dirigée passant par l'origine O, sur laquelle le segment OM est négatif ;

3°) ce segment négatif $OM = \rho$, dit *rayon vecteur*.

Les quatre groupes suivants de coordonnées polaires définissent donc le même point de l'espace :

$$(\alpha, \delta, \rho),\ (\alpha + \pi, \pi - \delta, \rho),\ (\alpha + \pi, -\delta, -\rho),\ (\alpha, \pi + \delta, -\rho).$$

Si on donne les coordonnées polaires ordinaires ou extraordinaires d'un point M, on en déduit évidemment les coordonnées rectilignes (x, y, z) de ce point au moyen des formules

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos\alpha \cos\delta, \\ y &= \rho \sin\alpha \cos\delta, \\ z &= \rho \sin\delta. \end{aligned}$$

Inversement, si on donne les coordonnées rectilignes (x, y, z) d'un point M, il suffit de résoudre les équations ci-dessus par rapport à ρ, α, δ pour obtenir les coordonnées polaires de ce point :

$$\rho = \pm\sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\sin\delta = \frac{z}{\rho}, \quad \sin\alpha = \frac{y}{\rho\cos\delta}, \quad \cos\alpha = \frac{x}{\rho\cos\delta};$$

on trouvera les coordonnées polaires ordinaires ou extraordinaires suivant qu'on aura, dans le calcul de ρ, choisi le signe supérieur ou le signe inférieur.

10. LE PROBLÈME DE LA PARALLAXE

Problème général. — *On considère deux systèmes parallèles d'axes coordonnés rectangulaires* OXYZ *et* $O_1X_1Y_1Z_1$. *On donne :*

1° *les coordonnées rectangulaires* (ξ, η, ζ) *du point* O *par rapport aux axes* $O_1X_1Y_1Z_1$;

2° *les coordonnées polaires* (ρ, α, δ) *d'un point* M *par rapport aux axes* OXYZ.

On demande les coordonnées polaires $(\rho_1, \alpha_1, \delta_1)$ *du point* M *par rapport aux axes* $O_1X_1Y_1Z_1$.

En projetant successivement sur les directions de chacun des trois axes le segment rectiligne O_1M et le contour O_1OM, qui ont même origine et même extrémité, on obtient les trois équations

$$\begin{aligned}
\rho_1 \cos\alpha_1 \cos\delta_1 &= \xi + \rho \cos\alpha \cos\delta, \\
\rho_1 \sin\alpha_1 \cos\delta_1 &= \eta + \rho \sin\alpha \cos\delta, \\
\rho_1 \sin\delta_1 &= \zeta + \rho \sin\delta.
\end{aligned}$$

Leur résolution par rapport à $(\rho_1 - \rho)$, $(\alpha_1 - \alpha)$, $(\delta_1 - \delta)$ fournit les solutions rigoureuses du problème :

$$\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha) = \frac{-\xi \sin\alpha + \eta \cos\alpha}{\rho \cos\delta + \xi \cos\alpha + \eta \sin\alpha},$$

$$\operatorname{tg}(\delta_1 - \delta) = \frac{\zeta\cos\delta - \sin\delta \operatorname{séc}\frac{\alpha_1 - \alpha}{2}\left(\xi\cos\frac{\alpha_1+\alpha}{2} + \eta\sin\frac{\alpha_1+\alpha}{2}\right)}{\rho + \zeta\sin\delta + \cos\delta\operatorname{séc}\frac{\alpha_1-\alpha}{2}\left(\xi\cos\frac{\alpha_1+\alpha}{2} + \eta\sin\frac{\alpha_1+\alpha}{2}\right)},$$

$$\rho_1 - \rho = \operatorname{séc}\frac{\alpha_1 - \alpha}{2}\operatorname{séc}\frac{\delta_1 - \delta}{2}\left\{\xi\cos\frac{\alpha_1+\alpha}{2}\cos\frac{\delta_1+\delta}{2}\right.$$

$$\left. + \eta\sin\frac{\alpha_1+\alpha}{2}\cos\frac{\delta_1+\delta}{2} + \zeta\cos\frac{\alpha_1-\alpha}{2}\sin\frac{\delta_1+\delta}{2}\right\}.$$

Cas particulier. — Ce problème se rencontre le plus souvent dans le cas particulier où les rapports $\xi : \rho$, $\eta : \rho$, $\zeta : \rho$, et par conséquent les différences

$$\frac{\rho_1 - \rho}{\rho} = \frac{h}{\rho}, \quad \alpha_1 - \alpha = k, \quad \delta_1 - \delta = l$$

sont des quantités petites, c'est-à-dire telles que leurs mesures (en radians pour les angles) ont pour carrés et produits deux à deux des quantités négligeables.

Au moyen des accroissements h, k, l subis par les coordonnées polaires, les équations du problème s'écrivent

$$\begin{aligned}(\rho + h)\cos(\alpha + k)\cos(\delta + l) &= \xi + \rho\cos\alpha\cos\delta,\\ (\rho + h)\sin(\alpha + k)\cos(\delta + l) &= \eta + \rho\sin\alpha\cos\delta,\\ (\rho + h)\sin(\delta + l) &= \zeta + \rho\sin\delta.\end{aligned}$$

Par hypothèse, nous pouvons développer les premiers membres en séries suivant les puissances croissantes de h, k, l, et arrêter ces développements aux termes du premier degré. Ceci constitue un système de trois équations linéaires en h, k, l ; leur résolution fournit les expressions des inconnues à l'approximation actuelle :

$$h = (\xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha)\cos\delta + \zeta\sin\delta,$$

$$k = \left(-\frac{\xi}{\rho}\sin\alpha + \frac{\eta}{\rho}\cos\alpha\right)\text{séc}\,\delta,$$

$$l = \left(-\frac{\xi}{\rho}\cos\alpha - \frac{\eta}{\rho}\sin\alpha\right)\sin\delta + \frac{\zeta}{\rho}\cos\delta.$$

Mais ces formules ne sont utilisables que si les quantités négligeables par hypothèse ne sont pas, dans les termes négligés des développements en séries, multipliées par des quantités très grandes ; ce dont on devra s'assurer en calculant les termes du second degré de ces développements. On constate alors que les dérivées secondes

$$\frac{\partial^2 k}{\partial\xi^2},\ \frac{\partial^2 k}{\partial\eta^2},\ \frac{\partial^2 k}{\partial\xi\partial\eta},\ \frac{\partial^2 l}{\partial\xi^2},\ \frac{\partial^2 l}{\partial\eta^2},\ \frac{\partial^2 l}{\partial\xi\partial\eta}$$

prennent pour $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$, des valeurs renfermant en facteur soit séc δ, soit tg δ. Ainsi les expressions approchées de k et l ne restent applicables à l'approximation actuelle que si δ n'approche pas de $\pm\pi : 2$.

Définition. — On appelle *parallaxe* d'un élément géométrique quelconque mesuré par rapport à des axes OXYZ la quantité qu'il faut ajouter à cette mesure pour avoir la mesure du même élément par rapport à des axes $O_1X_1Y_1Z_1$ parallèles aux premiers, et, habi-

tuellement, dans des conditions telles que les coordonnées rectangulaires de l'origine d'un système par rapport à l'autre sont petites vis-à-vis des autres longueurs considérées.

Les quantités $h = \rho_1 - \rho$, $k = \alpha_1 - \alpha$, $l = \delta_1 - \delta$ calculées dans le problème précédent sont donc les parallaxes des coordonnées polaires d'un point ; nous rencontrerons aussi le calcul de la parallaxe de la distance angulaire de deux points éloignés, par rapport à l'origine des coordonnées ; etc.

11. TRANSFORMATION DES COORDONNÉES RECTILIGNES

Problème théorique. — *On donne :* 1° *un système* OXYZ *d'axes rectangulaires ;* 2° *les coordonnées* (x_0, y_0, z_0) *d'un point* O' ; 3° *les cosinus directeurs* (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3) *de trois droites dirigées* X', Y', Z' *passant par le point* O' *et non situées dans un même plan ;* 4° *les coordonnées* (x, y, z) *d'un point* M.

On demande les coordonnées (x', y', z') *du point* M *par rapport aux axes* O'X'Y'Z'.

En projetant, successivement sur les directions de chacun des trois axes du système OXYZ, le segment rectiligne OM et le contour OO'M, qui ont même origine et même extrémité, on obtient les trois équations :

$$x = x_0 + a_1x' + a_2y' + a_3z',$$
$$y = y_0 + b_1x' + b_2y' + b_3z',$$
$$z = z_0 + c_1x' + c_2y' + c_3z'.$$

Problème inverse. — Inversement, *soit à exprimer les coordonnées nouvelles* (x', y', z') *en fonction des coordonnées anciennes* (x, y, z), *des coordonnées anciennes* (x_0, y_0, z_0) *de la nouvelle origine, et des neuf cosinus directeurs.*

Posons

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

différent de zéro par hypothèse, les trois axes nouveaux n'étant pas dans un même plan, et écrivons

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

le déterminant adjoint du déterminant Δ.

La résolution, par rapport à x', y', z', des trois équations linéaires qui terminent le problème précédent, donne

$$\begin{aligned} x' &= A_1 (x - x_0) + B_1 (y - y_0) + C_1 (z - z_0) \\ y' &= A_2 (x - x_0) + B_2 (y - y_0) + C_2 (z - z_0) \\ z' &= A_3 (x - x_0) + B_3 (y - y_0) + C_3 (z - z_0) \end{aligned}$$

Circonstances usuelles. — Les axes nouveaux sont ordinairement rectangulaires comme les axes primitifs. Outre les conditions

$$\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 &= 1, \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 &= 1, \\ a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 &= 1, \end{aligned}$$

les neuf cosinus vérifient encore, dans ce cas, les trois égalités

$$\begin{aligned} a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 &= 0, \\ a_3 a_1 + b_3 b_1 + c_3 c_1 &= 0, \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 & a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 & a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ a_2 a_1 + b_2 b_1 + c_2 c_1 & a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 & a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ a_3 a_1 + b_3 b_1 + c_3 c_1 & a_3 a_2 + b_3 b_2 + c_3 c_2 & a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 \end{vmatrix} = 1,$$

et Δ est égal à ± 1 suivant que les deux systèmes d'axes sont de même sens ou de sens contraires. Nous les supposerons de même sens :

$$\Delta = 1.$$

On reconnaît alors aisément que le déterminant Δ est identique à son déterminant adjoint, élément par élément, de manière que

$$\begin{aligned} x' &= a_1 (x - x_0) + b_1 (y - y_0) + c_1 (z - z_0), \\ y' &= a_2 (x - x_0) + b_2 (y - y_0) + c_2 (z - z_0), \\ z' &= a_2 (x - x_0) + b_3 (y - y_0) + c_3 (z - z_0). \end{aligned}$$

Cas particulier. — Dans le cas particulier où deux axes de même nom, par exemple Z et Z', sont parallèles,

$$a_3 = 0, \qquad b_3 = 0, \qquad c_3 = 1.$$

Supposons que les axes nouveaux sont rectangulaires, et soit α la valeur commune aux angles XX' et YY'. Les formules générales se réduisent à

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y &= y_0 + x' \sin \alpha + y' \cos \alpha, \\ z &= z_0 + z', \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x' &= \quad (x - x_0) \cos \alpha + (y - y_0) \sin \alpha, \\ y' &= -(x - x_0) \sin \alpha + (y - y_0) \cos \alpha, \\ z' &= \quad z - z_0. \end{aligned}$$

Problème pratique. — Dans la pratique, les directions des axes rectangulaires nouveaux (X', Y', Z') sont connues non par leurs cosinus directeurs, mais par les coordonnées polaires de deux d'entre eux, par exemple X' (α_1, δ_1) et Z' (α_3, δ_3), tandis que le troisième, Y', est déterminé par la condition d'être perpendiculaire au plan des deux autres et de compléter un système nouveau de même sens que le système primitif, ou de sens contraire.

Nous savons que

$$\begin{aligned} a_1 &= \cos \alpha_1 \cos \delta_1, & a_3 &= \cos \alpha_3 \cos \delta_3, \\ b_1 &= \sin \alpha_1 \cos \delta_1, & b_3 &= \sin \alpha_3 \cos \delta_3, \\ c_1 &= \sin \delta_1, & c_3 &= \sin \delta_3. \end{aligned}$$

De plus, les conditions de perpendicularité de Y' à X' et Z' sont

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0,$$
$$a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 = 0,$$

d'où, pour déterminer a_2, b_2, c_2,

$$\frac{a_2}{A_2} = \frac{b_2}{B_2} = \frac{c_2}{C_2} = \frac{\pm 1}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}};$$

et le système O'X'Y'Z' aura ou n'aura pas le sens du système OXYZ suivant que, dans le dernier membre, on adopte le signe supérieur ou le signe inférieur.

Remarque. — Les deux directions X', Y' devant être rectangulaires, les quatre données, α_1, δ_1, α_3, δ_3, du problème précédent sont liées par la condition

$$\sin \delta_1 \sin \delta_3 + \cos \delta_1 \cos \delta_3 \cos (\alpha_1 - \alpha_3) = 0.$$

Le problème le plus général de la transformation de coordonnées rectangulaires n'exige donc que la connaissance de six données : les trois coordonnées de la nouvelle origine et trois paramètres dont les neuf cosinus directeurs des axes nouveaux soient des fonctions vérifiant les six égalités

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1, \qquad a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 = 0,$$
$$a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1, \qquad a_3a_1 + b_3b_1 + c_3c_1 = 0,$$
$$a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1, \qquad a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

Il y a donc une infinité de pareils systèmes de paramètres admissibles. La mécanique adopte ordinairement les quantités connues sous le nom d'*angles d'Euler*. La géométrie emploie fréquemment les paramètres dits d'*Olinde Rodrigue*. Nous ferons usage de préférence, en vue des applications, des quantités A, B, C, introduites par M. Goedseels, et qui vont être définies.

Rotations successives. — Le déplacement des axes parallèlement à eux-mêmes de l'origine O à l'origine O' n'offre aucune

difficulté, et nous nous limiterons au cas dans lequel le système primitif et le système nouveau ont la même origine O. Supposons, de plus, que les sens de ces deux systèmes doivent être les mêmes.

Appelons A l'angle de position et B l'angle de pente de l'axe X′ par rapport aux axes OXYZ (fig. 2).

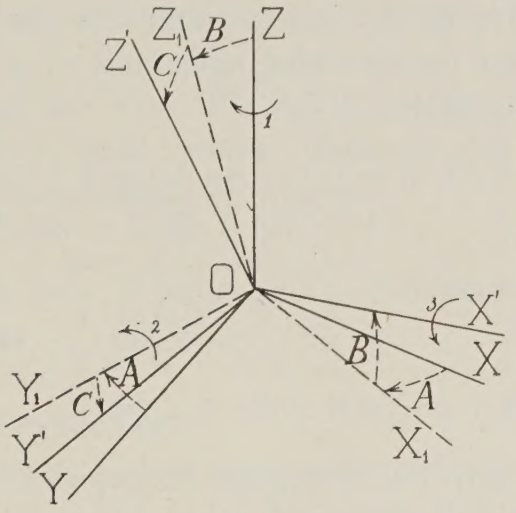

FIG. 2.

1. Autour de l'axe Z faisons tourner d'un angle A l'ensemble des axes X et Y, de X vers Y ; et soient X_1 et Y_1 respectivement les positions nouvelles de ces deux axes. Les formules de passage du système OXYZ au système OX_1Y_1Z sont

$$x = x_1 \cos A - y_1 \sin A,$$
$$y = x_1 \sin A + y_1 \cos A.$$

2. L'axe Y_1 est perpendiculaire aux axes X_1, X′ et Z. Autour de l'axe Y_1 faisons tourner d'un angle B l'ensemble des axes X_1 et Z, de X_1 vers Z : l'axe X_1 vient en X′, et soit Z_1 la position nouvelle de l'axe Z. Les formules de passage du système OX_1Y_1Z au système $OX'Y_1Z_1$ sont

$$x_1 = x' \cos B - z_1 \sin B,$$
$$z = x' \sin B + z_1 \cos B.$$

3. L'axe X′ est perpendiculaire aux axes Y_1, Y′, Z_1, Z′, et l'angle (Y_1Y') est égal à l'angle (Z_1Z') ; appelons cet angle C. Autour de l'axe X′ faisons tourner d'un angle C l'ensemble des axes Z_1 et Y_1,

de Z_1 vers Y_1 ; ces axes viennent respectivement en Z' et Y'. Les formules de passage du système $OX'Y_1Z_1$ au système $OX'Y'Z'$ sont

$$y_1 = y' \cos C - z' \sin C,$$
$$z_1 = y' \sin C + z' \cos C.$$

L'élimination de x_1, y_1, z_1, entre ces six relations laisse les expressions des coordonnées anciennes x, y, z en fonction des coordonnées nouvelles x', y', z' :

$$x = x' \cos A \cos B + y' (-\sin A \cos C - \cos A \sin B \sin C) + z' (\sin A \sin C - \cos A \sin B \cos C),$$

$$y = x' \sin A \cos B + y' (\cos A \cos C - \sin A \sin B \sin C) + z' (-\cos A \sin C - \sin B \sin B \cos C),$$

$$z = x' \sin B + y' \cos B \sin C + z' \cos B.$$

Pour en déduire, inversement, les expressions des coordonnées nouvelles x', y', z' en fonction des coordonnées primitives x, y, z, il suffit de résoudre ce système linéaire par rapport à x', y', z'.

En identifiant les trois égalités ci-dessus avec les expressions de x, y, z en fonction de x', y', z' écrites au moyen des cosinus directeurs des axes nouveaux, on en déduit, en fonction des quantités A, B, C, les cosinus directeurs a_1, b_1, c_1, a_2,... de ces axes :

$$a_1 = \cos A \cos C, \text{ etc.}$$

Cas particulier. — Considérons le cas particulier dans lequel les systèmes OXYZ et OX'Y'Z' sont assez peu différents pour que les carrés et produits des mesures, en radians, des angles A, B, C soient négligeables. Nous pouvons alors remplacer les sinus de ces angles par leurs mesures, leurs cosinus par l'unité, et supprimer les termes qui contiennent les produits AB, BC, CA. Il reste ainsi

$$x = x' - Ay' - Bz',$$
$$y = Ax' + y' - Cz',$$
$$z = Bx' + Cy' + z'.$$

12. TRANSFORMATION DES COORDONNÉES POLAIRES

Le problème de la parallaxe réalise la transformation des coordonnées polaires pour un simple transport des axes parallèlement à eux-mêmes.

Pour une rotation des axes OXYZ jusqu'en OX'Y'Z' autour de l'origine invariable O, nous venons d'obtenir les formules de transformation des coordonnées rectilignes,

$$x = f_1(x', y', z'),$$
$$y = f_2(x', y', z'),$$
$$z = f_3(x', y', z'),$$

homogènes et du premier degré.

Soient (ρ, α, δ), $(\rho', \alpha', \delta')$ les coordonnées polaires d'un point M par rapport aux axes OXYZ et OX'Y'Z' respectivement. Dans les égalités ci-dessus, l'élimination des coordonnées rectilignes au profit des coordonnées polaires laisse les trois équations

$$\rho \cos\alpha \cos\delta = f_1(\rho' \cos\alpha' \cos\delta', \rho' \sin\alpha' \cos\delta', \rho' \sin\delta'),$$
$$\rho \sin\alpha \cos\delta = f_2(\rho' \cos\alpha' \cos\delta', \rho' \sin\alpha' \cos\delta', \rho' \sin\delta'),$$
$$\rho \sin\delta = f_3(\rho' \cos\alpha' \cos\delta', \rho' \sin\alpha' \cos\delta', \rho' \sin\delta').$$

Elles sont homogènes et du premier degré en ρ, ρ' ; or, l'origine n'ayant pas changé, on a nécessairement

$$\rho = \rho' ;$$

et ces trois équations deviennent

$$\cos\alpha \cos\delta = f_1(\cos\alpha' \cos\delta', \sin\alpha' \cos\delta', \sin\delta'),$$
$$\sin\alpha \cos\delta = f_2(\cos\alpha' \cos\delta', \sin\alpha' \cos\delta', \sin\delta'),$$
$$\sin\delta = f_3(\cos\alpha' \cos\delta', \sin\alpha' \cos\delta'. \sin\delta') ;$$

d'où l'on pourra tirer soit α, δ en fonction de α', δ', soit α', δ' en fonction de α, δ.

En vue des applications, nous devons résoudre ce problème dans chacun des cas particuliers où l'un des axes est commun aux

deux systèmes ; nous le ferons dans l'hypothèse où ceux-ci sont de même sens.

1. Si l'axe X est commun aux deux systèmes, et si φ est la valeur des angles (YY') et (ZZ'),

$$\begin{aligned} x &= x', \\ y &= y' \cos\varphi - z' \sin\varphi, \\ z &= y' \sin\varphi + z' \cos\varphi ; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \cos\alpha \cos\delta &= \cos\alpha' \cos\delta', \\ \sin\alpha \cos\delta &= \sin\alpha' \cos\delta' \cos\varphi - \sin\delta' \sin\varphi, \\ \sin\delta &= \sin\alpha' \cos\delta' \cos\varphi + \sin\delta' \cos\varphi. \end{aligned}$$

2. Si l'axe Y est commun aux deux systèmes, et si φ est la valeur des angles (XX') et (ZZ'),

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\varphi - z' \sin\varphi, \\ y &= y', \\ z &= x' \sin\varphi + z' \cos\varphi ; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \cos\alpha \cos\delta &= \cos\alpha' \cos\delta' \cos\varphi - \sin\delta' \sin\varphi, \\ \sin\alpha \cos\delta &= \sin\alpha' \cos\delta', \\ \sin\delta &= \cos\alpha' \cos\delta' \sin\varphi + \sin\delta' \cos\varphi. \end{aligned}$$

3. Si l'axe Z est commun aux deux systèmes, et si φ est la valeur des angles (XX') et (YY'),

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\varphi - y' \sin\varphi, \\ y &= x' \sin\varphi + y' \cos\varphi, \\ z &= z' ; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \cos\alpha \cos\delta &= \cos\alpha' \cos\delta' \cos\varphi - \sin\alpha' \cos\delta' \sin\varphi, \\ \sin\alpha \cos\delta &= \cos\alpha' \cos\delta' \sin\varphi + \sin\alpha' \cos\delta' \sin\varphi, \\ \sin\delta &= \sin\delta'. \end{aligned}$$

En ne considérant que les angles de pente compris entre $-\pi/2$ et $+\pi/2$, on en tire

$$\delta = \delta', \qquad \alpha = \alpha' + \varphi,$$

comme il était nécessaire.

On voit par ces exemples comment on écrirait aussi les trois relations entre (α, δ, α', δ') en fonction des angles A, B, C définis au numéro précédent. Nous ne le ferons que dans le cas particulier de deux systèmes de repère assez voisins pour que les carrés et produits des mesures de ces angles soient négligeables :

$$\begin{aligned}
\cos\alpha\cos\delta &= \cos\alpha'\cos\delta' - A\sin\alpha'\cos\delta' - B\sin\delta',\\
\sin\alpha\cos\delta &= A\cos\alpha'\cos\delta' + \sin\alpha'\cos\delta' - C\sin\delta',\\
\sin\delta &= B\cos\alpha'\cos\delta' + C\sin\alpha'\cos\delta' + \sin\delta'.
\end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned}
\alpha' &= \alpha + \Delta\alpha,\\
\delta' &= \delta + \Delta\delta\ ;
\end{aligned}$$

$\Delta\alpha$ et $\Delta\delta$ sont des quantités petites comme A, B, C : leurs carrés et produits sont négligeables ; et les développements en séries des fonctions de ces quantités doivent être arrêtés aux termes du premier degré. Cette opération laisse un système de trois équations linéaires en $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$, duquel on tire

$$\begin{aligned}
\Delta\alpha &= -A - (B\sin\alpha - C\cos\alpha)\operatorname{tg}\delta,\\
\Delta\delta &= -B\cos\alpha - C\sin\alpha.
\end{aligned}$$

13. INSTRUMENTS ASTRONOMIQUES VISUELS

L'étude des instruments visuels se fera d'une manière approfondie, de points de vue différents, dans les cours d'Astronomie (partie pratique) et de Topographie. Ce que nous en dirons ci-dessous n'a pour objet que de faire connaître l'allure générale de cette théorie : les hypothèses simplificatrices admises dans ce but seront spécifiées dans chaque cas particulier.

Classification. — Nous adopterons la classification des instruments visuels préconisée par M. Goedseels dans ses Leçons d'Astronomie à l'Université de Louvain. Cette classification répartit les instruments visuels en instruments dits *primaires*, *binaires* et *ternaires*.

Instruments primaires. — Un instrument primaire est un ensemble d'organes déterminant une ou plusieurs droites immobiles, susceptibles d'être parcourues par un ou plusieurs rayons lumineux. Chacune de ces droites s'appelle une *ligne de visée*. Par rapport à une arme à feu, l'ensemble du sommet du guidon et du cran de mire de cette arme constitue un instrument visuel primaire à ligne de visée unique. L'instrument visuel primaire ordinairement employé en astronomie est la *lunette astronomique*.

Lunette astronomique. — On sait que la lunette astronomique est un ensemble de deux systèmes de lentilles dont l'un, l'*objectif*, provoque la formation d'une image lumineuse de l'objet observé, et dont l'autre, l'*oculaire*, constitue avec l'*œil* de l'observateur un système optique par l'intermédiaire duquel à un ou plusieurs points de l'image objective correspond une *image rétinienne* de ces points. L'objectif et l'oculaire sont agencés et disposés de manière que l'image rétinienne finale soit plus favorable à l'observation que l'image rétinienne qui serait due à l'œil seul. En particulier, l'image rétinienne due à l'ensemble de la lunette et de l'œil doit être plus grande que l'image rétinienne qui serait due à l'œil seul : exprimée par un nombre, cette qualité constitue le *grossissement* de la lunette. L'instrument doit encore posséder des qualités de *netteté* et de *clarté* sur lesquelles il n'est pas possible d'insister ici.

Chacun des systèmes *objectif* et *oculaire-œil* doit réaliser une correspondance point par point de l'objet observé et de son image lumineuse, objective ou rétinienne : c'est en quoi consiste le *stigmatisme* du système. De plus, il convient qu'à toute droite de l'objet corresponde une droite de l'image ; c'est en quoi consiste l'*orthoscopie* du système. x, y, z étant les coordonnées d'un point de l'objet, et x', y', z' les coordonnées du point correspondant de l'image par rapport aux mêmes axes, on voit aisément que, pour que le système soit orthoscopique, il faut et il suffit que les équations de correspondance soient de la forme

$$x' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1}{ax + by + cz + d},$$

$$y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{ax + by + cz + d},$$

$$z' = \frac{a_3x + b_3y + c_3z + d_3}{ax + by + cz + d},$$

où les rapports des coefficients a_1, a_2,.. b_1,... à l'un quelconque d'entre eux sont des constantes numériques propres au système optique considéré, et où le déterminant formé au moyen de ces coefficients est différent de zéro. On reconnaît dans ces relations les équations de la *correspondance homographique ;* les propriétés de cette correspondance sont l'indépendance des axes coordonnés, la réciprocité, et enfin la persistance en vertu de laquelle deux figures homographiques à une même troisième sont homographiques entre elles.

De plus, pour réaliser la qualité exprimée par la *fidélité de l'image*, le système optique est agencé de manière qu'il existe une droite, dite *axe du système*, telle que

1° à tout plan perpendiculaire à cette droite corresponde un plan qui ait la même orientation,

2° les droites joignant les points correspondants de deux pareils plans passent par un même point de l'axe du système.

En prenant l'axe du système pour axe des x, ces conditions simplifient les équations de la correspondance homographique jusqu'à les réduire à la forme

$$x' = \frac{p'x + q'}{px + q}, \quad y' = \frac{ky}{px + q}, \quad z' = \frac{kz}{px + q},$$

avec les conditions $k \neq 0$, $pq' - p'q \neq 0$; inversement,

$$x = -\frac{qx' - q'}{px' - p'}, \quad y = \frac{pq' - p'q}{k\,(px' - p')} \cdot y', \quad z = \frac{pq' - p'q}{k\,(px' - p')} \cdot z'.$$

C'est une correspondance homographique *de révolution.*

A un faisceau de droites parallèles du milieu-objet correspond un faisceau de droites concourantes du milieu-image ; à toute direction du milieu-objet correspond ainsi un point à distance

finie du milieu-image ; de plus, pour toutes les directions possibles du milieu-objet, le lieu des points correspondants du milieu-image est un plan perpendiculaire à l'axe du système, à savoir celui qui a pour équation

$$px' - p' = 0.$$

C'est le *plan focal* du milieu-image, et son intersection $(p' : p, 0, 0)$ avec l'axe est le *foyer* de cet espace, ou *foyer postérieur* du système optique.

De même, à un faisceau de droites parallèles du milieu-image correspond un faisceau de droites concourantes du milieu-objet ; à toute direction du milieu-image correspond ainsi un point à distance finie du milieu-objet ; de plus, pour toutes les directions possibles du milieu-image, le lieu des points correspondants du milieu-objet est un plan perpendiculaire à l'axe du système, à savoir celui qui a pour équation

$$px + q = 0.$$

C'est le *plan focal* du milieu-objet, et son intersection $(-q : p, 0, 0)$ avec l'axe est le *foyer* de cet espace, ou *foyer antérieur* du système optique.

Les objets observés par les astronomes au moyen de la lunette étant extrêmement éloignés, leurs images objectives se forment dans le plan focal postérieur de l'objectif. Au contraire, les objets observés par les topographes au moyen de la lunette sont à distance médiocre, et leurs images objectives se forment dans des plans normaux à l'axe et dont les abscisses sont des fonctions de leurs distances, d'après les relations ci-dessus.

Micromètre. — Dans le plan focal du milieu-image de l'objectif de la lunette telle que l'emploient les astronomes, se trouvent deux fils mobiles dont le point d'intersection peut être amené en coïncidence avec l'image du point visé. Ces deux fils sont ordinairement perpendiculaires l'un à l'autre et se déplacent parallèlement à eux-mêmes : leurs déplacements sont mesurés au moyen de deux vis micrométriques. L'ensemble de ces organes constitue un *micromètre rectangulaire* complet, permettant la mesure

des coordonnées rectangulaires de l'image par rapport à une configuration déterminée de l'ensemble des fils mobiles. Le micromètre peut ne comporter qu'un fil se déplaçant parallèlement à lui même, et actionné par une vis micrométrique : cet appareil ne mesure alors qu'une des coordonnées rectangulaires de l'image. Parfois l'un des fils passe constamment par un point fixe du plan focal, et se déplace dans ce plan par l'intermédiaire d'un tambour dont les déplacements angulaires se lisent sur un cercle gradué ; perpendiculairement à ce fil se meut un second fil dont les déplacements sont mesurés au moyen d'une vis micrométrique : l'ensemble de ces organes constitue un *micromètre polaire*, propre à la mesure des coordonnées polaires de l'image par rapport à une position déterminée du fil tournant.

Oculaire. — L'oculaire est un système optique déformable, ou mobile parallèlement à son axe, agencé de manière que, dans le système qu'il forme avec l'œil de l'observateur, le plan correspondant à la rétine puisse, pour toute conformation de l'œil, venir en coïncidence avec le plan transversal de l'image objective : cette modification de l'oculaire constitue la *mise au point* de celui-ci. Dans les instruments astronomiques, l'oculaire peut généralement subir un mouvement transversal de translation, de façon que l'image objective observée appartienne à peu près à son axe, le long duquel se réduisent à leur minimum les effets des imperfections inhérentes aux systèmes optiques.

Ligne de visée. — La ligne de visée d'une lunette astronomique dont les fils réticulaires passent par l'image objective du point observé est la droite du milieu-objet déterminée par ce point et par le foyer antérieur de l'objectif : la ligne de visée a pour image objective la parallèle à l'axe du système passant par le point d'intersection des fils réticulaires. En particulier, la ligne de visée principale est celle dont l'image passe par le point d'intersection des fils réticulaires lorsque ceux-ci constituent les axes de repère du plan réticulaire.

Lorsque la lunette n'est destinée qu'à l'observation de points extrêmement éloignés, comme lorsqu'elle est employée par les

astronomes (et non par les topographes), il suffit de définir la ligne de visée, pour une configuration donnée des fils réticulaires, comme une droite déterminée par la direction correspondante du milieu-objet et un point arbitraire solidaire de l'instrument.

Rapportons la lunette à un système d'axes rectangulaires dont l'axe des x appartient à la ligne de visée principale, et rapportons le plan réticulaire à des axes (ξ, η).

La ligne de visée correspondant au point (ξ, η) du plan réticulaire a pour équations

$$y = P(x - f), \qquad z = Q(x - f),$$

où f est l'abscisse du foyer antérieur, et P, Q des fonctions des coordonnées ξ, η et des constantes de la transformation.

L'expérience (ou une théorie plus détaillée) montre qu'on peut, sans erreur appréciable, remplacer les fonctions P, Q de (ξ, η) par leurs développements en séries suivant les puissances de ces variables limités à leurs termes du premier degré :

$$P = P_0 + P'\xi + P''\eta,$$
$$Q = Q_0 + Q'\xi + Q''\eta.$$

Mais les axes réticulaires sont ordinairement définis de manière que la ligne de visée principale ($\xi = 0$, $\eta = 0$) se confonde avec l'axe de l'objectif ; d'où $P_0 = 0$, $Q_0 = 0$,

$$P = P'\xi + P''\eta,$$
$$Q = Q'\xi + Q''\eta ;$$

et les équations de la ligne de visée (ξ, η) sont

$$y = (P'\xi + P''\eta)(x - f)$$
$$z = (Q'\xi + Q''\eta)(x - f).$$

Les coefficients réticulaires P', P'', Q', Q'' se déterminent expérimentalement.

Problème. — *On connaît les constantes instrumentales* P', P'', Q', Q'', f ; *au point réticulaire* (ξ, η), *dont les coordonnées sont con-*

nues par les lectures au micromètre, on observe l'image objective d'un point dont la distance à l'origine des coordonnées est connue et égale à ρ. *On demande les deux autres coordonnées polaires* (α, δ) *de ce point.*

Écrivons que les équations de la ligne de visée sont satisfaites par les coordonnées

$$\rho \cos \alpha \cos \delta, \qquad \rho \sin \alpha \cos \delta, \qquad \rho \sin \delta$$

du point observé :

$$\sin \alpha \cos \delta = (P'\xi + P''\eta)\left(\cos \alpha \cos \delta - \frac{f}{\rho}\right)$$

$$\sin \delta = (Q'\xi + Q''\eta)\left(\cos \alpha \cos \delta - \frac{f}{\rho}\right).$$

Ces deux équations en α, δ résolvent le problème proposé. On y voit que les mesures des angles α, δ sont des quantités petites comme celles dont on a négligé les carrés et produits dans les développements des fonctions P, Q.

Dans les observations astronomiques, le rapport (f : ρ) est assimilable à zéro ; moyennant cette simplification, et à l'approximation actuelle,

$$\begin{cases} \alpha = P'\xi + P'\eta, \\ \delta = Q'\xi + Q''\eta. \end{cases}$$

Instruments binaires. — Un instrument binaire est ce que devient un instrument primaire quand il est rendu susceptible de prendre un mouvement de rotation autour d'une droite. Celle-ci est l'*axe* de l'instrument binaire.

Cercle gradué. — Un instrument binaire complet porte un cercle théoriquement situé dans un plan perpendiculaire à l'axe de l'instrument, centré sur cet axe, organisé et gradué dans le but de mesurer les déplacements angulaires de l'instrument primaire autour de cet axe.

La graduation et la chiffraison de ce cercle, la précision de ses lectures renforcée au moyen de verniers et de microscopes, les erreurs inhérentes à sa construction et à son usage, et la manière

de corriger ces erreurs seront étudiées dans d'autres cours. Disons seulement ici que la principale de ces erreurs est l'*erreur d'excentricité* due à ce que le graveur de la graduation n'a pas pu faire coïncider parfaitement le centre du cercle et le centre de la machine à diviser. On démontre que, si l'erreur d'excentricité était la seule erreur du cercle gradué, une lecture supplémentaire, faite en un point diamétralement opposé à celui où se fait la lecture principale, suffirait à faire disparaître les termes principaux de son influence.

C'est pour ce motif, et pour des motifs analogues, que les lectures sur les cercles gradués des instruments astronomiques se font en plusieurs points diamétralement opposés deux à deux.

Hypothèses simplificatrices. — Dans l'étude actuelle, *toute provisoire,* des instruments visuels, nous supposerons nulles les inévitables erreurs instrumentales : nous raisonnerons comme si le constructeur avait pu réaliser parfaitement son projet. En particulier, dans l'étude des instruments binaires, nous introduirons les hypothèses simplificatrices suivantes :

1° La ligne de visée principale rencontre constamment l'axe de rotation de l'instrument, et ceci en un point fixe également distant des points qui déterminent matériellement cet axe de rotation ;

2° La ligne de visée principale est perpendiculaire à l'axe de rotation (ce que les praticiens exprimeraient en disant que la *collimation* est nulle).

Axes primaires. — Les axes primaires sont des axes rectangulaires auxquels nous rapportons la partie mobile de l'instrument binaire. Le point invariable défini par la première hypothèse ci-dessus est adopté pour origine O de ce système d'axes. La ligne de visée principale, dirigée de manière à faire un petit angle avec la direction du point observé, est l'axe primaire des x, ou axe des x_1. L'axe primaire des z, ou axe des z_1, est l'une des deux directions de l'axe de rotation, perpendiculaire à l'axe des x_1 par hypothèse. Le choix de cette direction et le sens du système complètent la définition de celui-ci.

Axes binaires. — Les axes binaires sont ceux auxquels nous rapportons la partie fixe de l'instrument binaire. Leur origine est encore le point O (fig. 3) ; leur axe des z, ou axe des z_2, est l'axe de rotation, et dirigé de manière à se confondre avec l'axe des z_1 ; leurs axes des x et des y, ou axes des x_2 et des y_2, sont les positions de l'axe des x_1 lorsque les lectures sur le cercle gradué sont respectivement *zéro* et (+ *1 droit*) ; ainsi, pour toute configuration de l'instrument, la lecture l sur le cercle gradué est égale à l'angle de position de la droite Ox_1 par rapport aux axes binaires.

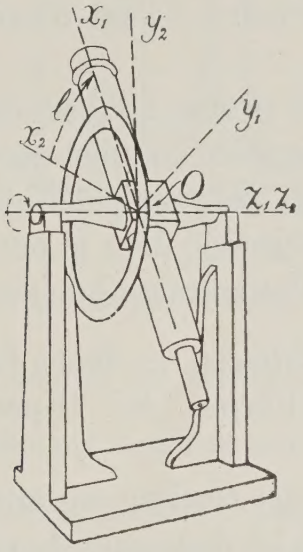

FIG. 3. Instrument binaire.

PROBLÈME. — *Après une observation astronomique au moyen d'un instrument binaire, on donne : 1° les coefficients réticulaires* P′, P″, Q′, Q″ ; *2° la lecture* l *sur le cercle gradué ; 4° les coordonnées réticulaires* (ξ, η) *de l'image objective du point observé. On demande les deux coordonnées polaires* (α_2, δ_2) *du point observé par rapport aux axes binaires.*

Nous savons que les coordonnées de ce point, dans le système primaire, sont

$$\alpha_1 = P'\xi + P''\eta,$$
$$\delta_1 = Q'\xi + Q''\eta.$$

Or les deux systèmes, primaire et binaire, ont même axe des z, et leurs autres axes diffèrent d'un angle l ; donc

$$\alpha_2 = l + P'\xi + P''\eta,$$
$$\delta_2 = Q\xi + Q''\eta.$$

Instruments ternaires. — Un instrument ternaire est ce que devient un instrument binaire quand il est rendu susceptible de tourner autour d'une seconde droite. Celle-ci est l'*axe* ternaire de l'instrument. Dans les instruments astronomiques et topographiques usuels, l'axe ternaire et l'axe binaire sont théoriquement perpendiculaires.

Outre le cercle gradué propre à l'instrument binaire qui le constitue, un instrument ternaire complet porte un cercle théoriquement situé dans un plan perpendiculaire à l'axe ternaire, centré sur cet axe, organisé et gradué dans le but de mesurer les déplacements angulaires de l'instrument binaire autour de cet axe.

Hypothèses simplificatrices. — Dans l'étude des instruments ternaires, nous introduirons les hypothèses simplificatrices suivantes :

1° Le constructeur a pu réaliser parfaitement son intention de rendre perpendiculaires les deux axes de rotation ;

2° Ces deux axes passent par un même point, et leur point d'intersection est, par rapport à l'instrument binaire, l'origine commune aux divers systèmes de coordonnées définis ci-dessus.

Axes binaires. — Les axes binaires sont ceux auxquels nous rapportons la partie de l'instrument constituant un instrument binaire. Nous adoptons comme tels les axes binaires définis dans la théorie des instruments binaires. Soit φ l'angle de position, dans ce système, de l'une des deux directions de l'axe ternaire de rotation.

Axes ternaires. — Les axes ternaires sont ceux auxquels nous rapportons la partie fixe de l'instrument (fig. 4). Leur origine peut, par hypothèse, se confondre avec l'origine des axes binaires. Nous

prenons pour axe ternaire des z, ou axe des z_3, l'axe de rotation ternaire de l'instrument, dans la direction dont l'angle de position binaire a été noté φ ; et nous adoptons pour axes ternaires des x et

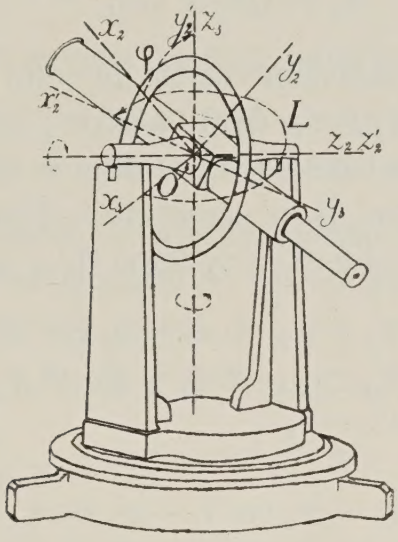

FIG. 4. Instrument ternaire.

des y, ou axes des x_3 et des y_3, les positions de la direction Ox'_2 dont les coordonnées polaires binaires sont $\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$ et 0, respectivement telles que le cercle ternaire, théoriquement centré sur Oz_3, marque 0 et (+ *1 droit*) : ainsi la lecture L sur ce cercle est constamment l'angle de position de cette direction Ox'_2 dans le système ternaire.

PROBLÈME. — *Après une observation astronomique au moyen d'un instrument ternaire, on connaît :* 1° *les constantes instrumentales* P′, P″, Q′, Q″, φ ; 2° *les coordonnées réticulaires* (ξ, η) *de l'image objective du point observé ;* 3° *les lectures* l *et* L *respectivement sur le cercle gradué binaire et sur le cercle gradué ternaire.*

On demande les coordonnées polaires (α_3, δ_3) *du point observé par rapport aux axes ternaires.*

La résolution de ce problème consiste dans le passage des coordonnées primaires aux coordonnées binaires, puis de celles-ci aux

coordonnées ternaires. La première partie de cette transformation a été faite dans l'étude des instruments binaires et a donné

$$\alpha_2 = l + P'\xi + P''\eta,$$
$$\delta_2 = Q'\xi + Q''\eta.$$

Pour effectuer la deuxième partie de cette transformation, formons le système $Ox'_2y'_2z'_2$, dont l'axe Ox'_2 a été défini, dont l'axe Oz'_2 se confond avec l'axe des z_2, et dont le sens est celui des axes binaires. Nous aurons, pour passer du système $Ox_2y_2z_2$ au système $Ox'_2y'_2z'_2$, puis de celui-ci au système $Ox_3y_3z_3$, les équations

$$x'_2 = x_2 \sin\varphi - y_2 \cos\varphi,$$
$$y'_2 = x_2 \cos\varphi + y_2 \sin\varphi,$$
$$z'_2 = z_2,$$

et

$$x_3 = x'_2 \cos L - z'_2 \sin L,$$
$$y_3 = x'_2 \sin L + z'_2 \cos L,$$
$$z_3 = y'_2,$$

puis, par élimination de x_2, y_2, z'_2,

$$x_3 = (x_2 \sin\varphi - y_2 \cos\varphi)\cos L - z_2 \sin L,$$
$$y_3 = (x_2 \sin\varphi - y_2 \cos\varphi)\sin L + z_2 \cos L,$$
$$z_3 = x_2 \cos\varphi + y_2 \sin\varphi.$$

En coordonnées polaires, quelle que soit la distance du point observé,

$$\cos\alpha_3 \cos\delta_3 = \sin\varphi \cos\alpha_2 \cos\delta_2 \cos L - \cos\varphi \sin\alpha_2 \cos\delta_2 \cos L - \sin\delta_2 \sin L,$$

$$\sin\alpha_3 \cos\delta_3 = \sin\varphi \cos\alpha_2 \cos\delta_2 \cos L - \cos\varphi \sin\alpha_2 \cos\delta_2 \sin L + \sin\delta_2 \cos L,$$

$$\sin\delta_3 = \cos\varphi \cos\alpha_2 \cos\delta_2 + \sin\varphi \sin\alpha_2 \cos\delta_2.$$

Limitons à leurs termes petits de l'ordre de $(P'\xi + P''\eta)$ et de $(Q'\xi + Q''\eta)$ les développements des fonctions de α_2 et de δ_2. La

dernière équation se réduit alors jusqu'à montrer que, à cette approximation,

$$\delta_3 = \frac{\pi}{2} - (\varphi - \alpha_2),$$

d'où, après substitution dans les deux premières équations,

$$\cos \alpha_3 = \cos L - (Q'\xi + Q''\eta) \operatorname{cosec} (\varphi - l) \cdot \sin L,$$
$$\sin \alpha_3 = \sin L + (Q'\xi + Q''\eta) \operatorname{cosec} (\varphi - l) \cdot \cos L.$$

Ces relations expriment, à l'approximation actuelle, que l'angle α_3 est égal à l'angle L augmenté du petit angle qui a pour mesure $(Q'\xi + Q''\eta) \operatorname{cosec} (\varphi - l)$. Ainsi

$$\alpha_3 = L + (Q'\xi + Q''\eta) \operatorname{cosec} (\varphi - l),$$
$$\delta_3 = \frac{\pi}{2} - \varphi + l + P'\xi + P''\eta.$$

La valeur théorique de φ est ordinairement 0 ou $\frac{\pi}{2}$. Dans la première hypothèse,

$$\varphi = 0 \quad \begin{cases} \alpha_3 = L - (Q'\xi + Q''\eta) \operatorname{cosec} l, \\ \delta_3 = \frac{\pi}{2} + l + P'\xi + P''\eta ; \end{cases}$$

dans la deuxième hypothèse,

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \begin{cases} \alpha_3 = L + (Q'\xi + Q''\eta) \operatorname{séc} l, \\ \delta_3 = l + P'\xi + P''\eta. \end{cases}$$

Rappelons que ces résultats ne seraient applicables qu'à des instruments parfaits. La question doit donc être reprise dans un enseignement ultérieur, en tenant compte de toutes les erreurs instrumentales, et, en tenant compte, de plus, de la non-coïncidence des axes binaires ou ternaires instrumentaux avec leur position théorique dans l'espace.

14. DIVISION DE CE COURS

Les matières de ce Cours se répartissent d'après le point de l'espace choisi, dans leur étude, comme origine des coordonnées. Pour ce point nous prendrons successivement :

I. L'ŒIL DE L'OBSERVATEUR, c'est-à-dire *un point voisin de la surface de la Terre, accessible à l'œil de l'observateur,*

II. LE CENTRE DE LA TERRE,

III. LE CENTRE DU SOLEIL ;

d'où la division de ce Cours en trois parties :

Première partie : COORDONNÉES LOCALES,

Deuxième partie : COORDONNÉES GÉOCENTRIQUES,

Troisième partie : COORDONNÉES HÉLIOCENTRIQUES.

PREMIÈRE PARTIE

COORDONNÉES LOCALES

CHAPITRE PREMIER

COORDONNÉES HORIZONTALES

15. LA VERTICALE

Repérons d'une façon quelconque la position d'équilibre d'un *fil à plomb* suspendu en un point voisin de la surface de la Terre ; puis répétons l'observation au même point avec un fil de longueur différente et une autre masse. Nous constatons que la droite suivant laquelle le fil se met en équilibre est indépendante de l'instant de l'observation, de la longueur du fil et de la masse employée : *en tout point voisin de la surface de la Terre, le fil à plomb se met en équilibre suivant une droite invariable ;* on donne à cette droite le nom de *verticale* en ce point.

Des deux directions de la verticale en un point, celle suivant laquelle la masse du fil à plomb est au delà du point de suspension est la *direction nadirale* (vers *le bas*) ; la direction opposée est la *direction zénithale* (vers *le haut*).

Le *zénith* et le *nadir* d'un point sont les points d'intersection de la verticale de ce point avec la sphère céleste, respectivement dans la direction zénithale et dans la direction nadirale.

Un *plan horizontal,* par rapport à un point accessible à l'observateur, est tout plan perpendiculaire à la verticale de ce point. L'*horizon* d'un point est le plan horizontal qui passe par ce point ; et, sur la sphère céleste, le *grand cercle horizon* est l'intersection de cette sphère et du plan de l'horizon.

16. COORDONNÉES HORIZONTALES

Axes coordonnés. — Un point accessible à l'œil de l'observateur étant pris pour origine O, les axes du système des coordonnées horizontales se définissent comme suit :

1° L'axe Z est la *verticale* de l'origine, dirigée dans son *sens zénithal.* Ainsi le plan XY est l'*horizon* de l'origine. Les plans passant par l'axe Z sont des *verticaux ;* les cônes de révolution autour de cet axe sont des *almicantarats.*

2° L'axe X est provisoirement indéterminé : sa direction positive peut, en attendant une définition précise, se fixer dans l'horizon par un point visible et invariable quelconque de celui-ci. Le *premier vertical* est le plan YZ.

3° Le système est *direct* (gaucher) (1).

Coordonnées polaires. — 1° L'angle de position s'appelle ici l'*azimut.* L'*amplitude* d'une direction dans l'horizon est un angle ayant pour origine l'axe Y ou la direction opposée, pour extrémité la direction considérée, et compté dans l'un ou l'autre sens, de manière à ne pas dépasser 90° ; l'origine et le sens de l'amplitude doivent être précisés dans chaque cas.

2° L'angle de pente s'appelle ici la *hauteur.* La *distance zénithale* est le complément de la hauteur ; la *distance nadirale* est le supplément de la distance zénithale.

---

(1) Ceci n'est pas essentiel : les instruments sont parfois gradués de manière à convenir à un système droitier.

17. INSTRUMENTS

Théodolite. — Le théodolite est l'instrument ternaire complet propre à la mesure des coordonnées horizontales polaires. Son axe ternaire est théoriquement vertical ; la lecture sur le cercle horizontal est théoriquement nulle lorsque la ligne de visée principale est dans le vertical parallèle à la droite horizontale choisie pour origine des azimuts ; la lecture sur le cercle vertical est théoriquement nulle lorsque la ligne de visée est soit horizontale, soit zénithale ; cette lecture est alors théoriquement soit la hauteur, soit la distance zénithale, respectivement. La théorie approfondie de cet instrument se fera dans le cours de Topographie. — La figure 4 (p. 43) renferme le schéma d'un théodolite. Diverses dispositions, sans importance ici, font prendre au théodolite le nom de *tachéomètre,* d'*altazimut,* etc.

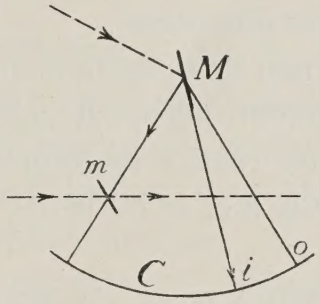

FIG. 5. Sextant
Plan perpendiculaire aux deux miroirs (plan de visée).

Sextant. — Le sextant est un instrument à main employé surtout par les marins pour la détermination des hauteurs. Les topographes l'appliquent aussi à la mesure de la distance angulaire de deux points par rapport au lieu d'observation.

Une glace *m* (fig. 5), dite *petit miroir,* dont la moitié est étamée, est fixe par rapport au châssis de l'instrument. Le miroir M, dit *grand miroir,* peut tourner autour d'une parallèle à l'intersection de son plan et de celui du petit miroir ; son mouvement entraîne celui d'une alidade terminée par un

index *i* ; celui-ci, constamment dans le plan du grand miroir, se déplace le long d'un limbe gradué C, dont le centre appartient à l'axe de rotation du grand miroir, et dont le rayon zéro est parallèle au plan du petit miroir. L'alidade est déplacée à la main, avec le grand miroir, jusqu'à ce que les images des deux points, — l'une directe à travers la partie non étamée du petit miroir, l'autre par double réflexion, sur M, puis sur *m*, — viennent se confondre dans une lunette ou sur la ligne de visée d'un viseur à pinnules. La distance angulaire des points visés se confond, à cet instant, avec l'angle que fait le rayon tombant sur M avec ce rayon après réflexion sur *m* ; on sait que cet angle est égal à deux fois l'angle des deux miroirs et a, par suite, pour mesure le double de l'arc du limbe allant du zéro de la graduation à l'index *i*. Il suffit donc que la graduation compte chaque degré comme deux degrés pour que la lecture à l'index donne l'angle demandé.

Dans la réalité, le constructeur ne peut réaliser qu'imparfaitement cette description théorique, et il y a lieu d'étudier l'influence des diverses erreurs instrumentales.

Pour la mesure à la mer de la hauteur d'un astre, on dispose le plan moyen de l'instrument, perpendiculaire aux miroirs, dans le vertical de l'astre, et on réalise la coïncidence du rayon visuel tangent à la surface de la mer et du rayon de l'astre après double réflexion.

Pour la même mesure à terre, on dispose l'instrument de la même manière : les rayons amenés dans le viseur émanent tous deux de l'astre (extrêmement éloigné), l'un après réflexion sur un *horizon artificiel* (miroir horizontal, bain de mercure), l'autre après réflexion sur les deux miroirs ; la lecture doit être divisée par deux.

Astrolabe à prisme. — Théoriquement, l'astrolabe à prisme est équivalent à un théodolite dont la lunette aurait été calée pour une hauteur de 60°. La lunette est horizontale et peut tourner autour d'un axe vertical. Elle reçoit (fig. 6), après réflexion totale sur deux faces d'un prisme triangulaire équilatéral, deux rayons

d'un même astre (extrêmement éloigné), l'un tombant directement sur le prisme, l'autre y pénétrant après réflexion sur un bain de mercure.

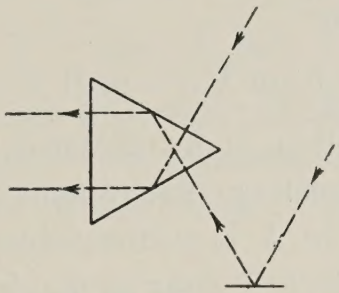

FIG. 6. Astrolabe à prisme. Plan de visée, vertical.

L'instrument permet de fixer l'instant du passage de l'astre dans l'almicantarat de $(60^\circ + \epsilon)$, ϵ étant un angle petit, théoriquement nul, qui doit se déterminer expérimentalement.

18. MOUVEMENT DIURNE

Lois du mouvement diurne. — Parmi les astres visibles la nuit, il y en a quelques-uns qui se distinguent des autres par leur lumière plus fixe, par leur manque de *scintillation*. De crainte de n'arriver qu'à des lois particulières, nous étudierons d'abord les autres astres, beaucoup plus nombreux.

Nous constatons que ces astres se meuvent par rapport à la Terre : l'aspect du ciel varie avec le temps. Ce changement d'aspect est tel que nous pouvons, d'une nuit à la suivante, reconnaître un astre déterminé à sa position, certainement peu variable, parmi les astres voisins, et à la configuration de ceux-ci.

Étudiant ce mouvement au moyen d'un théodolite et d'une horloge, nous acquérons les résultats suivants.

1. Soient (A_1, H_1), (A_2, H_2),... (A_n, H_n) l'azimut et la hauteur *d'un même astre* à des instants différents quelconques. Les équations

$$a \cos A_1 + b \sin A_1 + c \operatorname{tg} H_1 = d \operatorname{séc} H_1,$$
$$a \cos A_2 + b \sin A_2 + c \operatorname{tg} H_2 = d \operatorname{séc} H_2,$$
$$\cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots$$
$$a \cos A_n + b \sin A_n + c \operatorname{tg} H_n = d \operatorname{séc} H_n$$

peuvent être satisfaites, quelque grand que soit n, par un même système de valeurs (a, b, c, d), à l'approximation correspondant aux observations. Ainsi, la direction de l'astre étudié appartient à chaque instant au *cône*

$$a \cos A + b \sin A + c \operatorname{tg} H = d \operatorname{séc} H$$

issu du point d'observation, et *de révolution* autour d'une droite dont des paramètres directeurs, par rapport aux axes des coordonnées horizontales, sont (a, b, c) et invariables.

2. La même étude effectuée pour *un nombre quelconque d'astres* fournit des valeurs proportionnelles pour les paramètres directeurs des axes des cônes décrits par les directions de chacun d'eux. Ainsi, *les axes de tous ces cônes sont confondus.*

3. Des paramètres directeurs de l'axe commun à tous ces cônes, déduisons ses coordonnées polaires horizontales (A_o, H_o). Soient (A_i, H_i) les coordonnées polaires horizontales de la direction d'un astre quelconque à l'instant quelconque t_i ; elles sont liées par la relation

$$\cos A_o \cos H_o \cos A_i + \sin A_o \cos H_o \sin A_i + \sin H_o \operatorname{tg} H_i = \cos V \operatorname{séc} H_i,$$

dans laquelle V est la demi-ouverture du cône décrit par cette direction.

L'équation du plan déterminé par l'axe du cône et la direction de l'astre à l'instant t_i est, avec A et H pour coordonnées courantes,

$$\begin{vmatrix} \cos A & \sin A & \operatorname{tg} H \\ \cos A_o & \sin A_o & \operatorname{tg} H_o \\ \cos A_i & \sin A_i & \operatorname{tg} H_i \end{vmatrix} = 0.$$

Les cosinus directeurs (a_i, b_i, c_i) de la normale à ce plan sont donnés par les égalités

$$\frac{a_i}{\begin{vmatrix} \sin A_o \operatorname{tg} H_o \\ \sin A_i \operatorname{tg} H_i \end{vmatrix}} = \frac{b_i}{\begin{vmatrix} \operatorname{tg} H_o \cos A_o \\ \operatorname{tg} H_i \cos A_i \end{vmatrix}} = \frac{c_i}{\begin{vmatrix} \cos A_o \sin A_o \\ \cos A_i \sin A_i \end{vmatrix}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{\text{Somme des carrés de ces trois mineurs}}}.$$

Cherchons *la loi suivant laquelle ce plan,* ou sa normale, *tourne autour de l'axe du cône.* Comptons le temps à partir d'un instant t_0 ($i = 0$). L'angle P que fait ce plan à l'instant t_i avec sa position initiale (a_0, b_0, c_0) a pour cosinus

$$\cos P = a_0 a_i + b_0 b_i + c_0 c_i.$$

Construisons un diagramme ayant en abscisses les temps t_i et en ordonnées les angles P correspondants. Nous constatons que la ligne obtenue est *une droite :* l'angle P est une fonction linéaire du temps t,

$$P = p(t - t_0).$$

Ainsi, *le mouvement de la direction d'un astre est uniforme.*

Appelons s le temps nécessaire à ce que la direction d'un astre décrive entièrement son cône, ou le temps nécessaire à ce que l'angle P augmente de 2π :

$$2\pi = ps, \quad p = \frac{2\pi}{s}.$$

L'équation du mouvement de la direction de l'astre est

$$P = \frac{2\pi}{s}(t - t_0).$$

4. Le temps s est indépendant de l'astre considéré : *c'est dans le même temps que les directions de tous les astres décrivent leurs cônes de révolution.*

Il résulte de ces quatre lois que les astres se meuvent de manière que toutes leurs directions forment *une gerbe indéformable :* par rapport au point d'observation, la distance angulaire de deux astres quelconques est invariable. Les projections centrales des astres sur la sphère céleste constituent une figure invariable, comme si elles étaient fixées à une sphère qui glisserait sur la sphère céleste en tournant autour de deux points immobiles.

Ce mouvement d'ensemble de la plupart des astres est, par définition, *le mouvement diurne.* Les lois qui viennent d'être découvertes sont les *lois du mouvement diurne.*

Le *lever* d'un astre est sa position à l'instant où sa hauteur s'annule en devenant positive ; le *coucher* d'un astre est sa position à l'instant où sa hauteur s'annule en devenant négative.

L'instant de la *culmination supérieure* d'un astre est celui où sa hauteur est maximum ; et de sa *culmination inférieure* celui où sa hauteur est minimum ; la culmination d'un astre, sans spécification, s'entend de sa culmination supérieure. Pour les astres vérifiant les lois du mouvement diurne, et ayant un lever et un coucher, la culmination supérieure partage en deux intervalles égaux le temps allant du lever au coucher, et la culmination inférieure partage en deux intervalles égaux le temps allant du coucher au lever.

Un astre est dit *circompolaire visible* en un point d'observation lorsque sa hauteur est constamment positive en ce point ; et *circompolaire invisible* si sa hauteur est constamment négative. Un astre circompolaire, en un point terrestre, n'a ni lever ni coucher en ce point.

Étoiles. — Les *étoiles* sont, *par définition,* les astres qui obéissent aux lois du mouvement diurne. Les autres astres se déplacent donc par rapport aux étoiles, d'où, dans l'antiquité, leur nom d'*astres errants*.

Nous appellerons *gerbe stellaire* l'ensemble indéformable des directions des étoiles, et *sphère étoilée* l'ensemble indéformable de leurs projections centrales sur la sphère céleste.

De plus :

1° Les étoiles scintillent, tandis que les autres astres nous envoient une lumière fixe ;

2° Quelle que soit la puissance de la lunette employée, les étoiles n'y apparaissent que comme des points brillants, tandis que les autres astres y montrent un diamètre croissant avec la puissance de l'instrument.

Axe du monde. — L'*axe du monde* est la droite autour de laquelle la droite déterminée par l'origine des coordonnées et une étoile quelconque décrit un cône de révolution. Les intersections

de cette droite et de la sphère céleste sont les *pôles célestes,* points constamment communs à la sphère céleste et à la sphère étoilée. De ces deux points, le *pôle élevé*, pour le point d'observation, est celui dont la hauteur est positive en ce point ; le *pôle abaissé,* celui dont la hauteur est négative.

Des deux directions de l'axe du monde, l'une fait un angle fort petit (moindre que 2°) avec la direction d'une étoile facilement reconnaissable, dite *étoile polaire*. C'est, par définition, la *direction nord* de l'axe du monde : l'autre est sa *direction sud*. Les pôles célestes correspondants sont respectivement le *pôle céleste nord* et le *pôle céleste sud*.

Pour les habitants de nos contrées, l'étoile polaire est circompolaire visible, et le pôle élevé est le pôle nord.

Le mouvement diurne s'effectue dans le sens rétrograde (droitier) *pour un observateur couché le long de l'axe du monde, la tête dans la direction du pôle céleste nord.* Le mouvement diurne projeté sur l'horizon d'un lieu est donc rétrograde ou direct suivant que, en ce lieu, le pôle élevé est le pôle nord ou le pôle sud.

Jour sidéral. — Le *jour sidéral* est le temps nécessaire à ce que le cône, lieu de la droite allant de l'origine à une étoile quelconque, soit entièrement décrit ; sa durée est un peu moindre que l'ensemble d'un jour et d'une nuit consécutifs. Il s'écoule un jour sidéral entre deux culminations consécutives de même nom d'une même étoile, un demi-jour sidéral entre deux culminations consécutives de noms contraires.

19. LA MÉRIDIENNE, ORIGINE DES AZIMUTS

Méridien. — Le *méridien* du point d'observation, ou *méridien du lieu,* est le plan déterminé par la verticale et l'axe du monde relatifs à ce point.

Le méridien du lieu est partagé par l'axe du monde en deux demi-méridiens ; de ces deux demi-méridiens, celui qui contient

la direction zénithale de la verticale est le *méridien supérieur ;* le *méridien inférieur* est celui qui contient la direction nadirale.

Les culminations d'une étoile se confondent avec ses passages au méridien.

De même sur la sphère céleste : le *grand cercle méridien* du point d'observation, ou méridien du lieu, est le grand cercle passant par le zénith, le nadir et les pôles célestes.

Le grand cercle méridien du lieu est partagé en deux demi-grands cercles par les pôles célestes : celui qui contient le zénith est le *méridien supérieur ;* celui qui contient le nadir est le *méridien inférieur.*

Méridienne. — La *méridienne* est la droite d'intersection de l'horizon et du méridien du lieu : c'est la projection de l'axe du monde sur l'horizon.

Points cardinaux. — Des deux directions de la méridienne, la projection sur l'horizon de la direction nord de l'axe du monde est la *direction nord de la méridienne ;* l'autre est la *direction sud de la méridienne.* Les points correspondants sur le grand cercle horizon sont respectivement le *point cardinal nord* ou *septentrion,* le *point cardinal sud* ou *midi.*

Dans l'horizon, menons, par le point d'observation, la perpendiculaire à la méridienne. La direction de cette droite rencontrée, en parcourant l'horizon dans le sens rétrograde, du nord au sud de la méridienne, est l'*est, orient* ou *levant ;* en le parcourant du sud au nord, l'*ouest, occident* ou *couchant.*

Origine des azimuts. — L'origine des azimuts, axe X du système des coordonnées horizontales (indéterminé jusqu'ici), est la direction nord de la méridienne. L'axe Y est donc dirigé vers l'ouest.

On dit souvent un azimut *ouest* ou *occidental* d'autant de degrés pour un azimut de *plus* ce nombre de degrés, et un azimut *est* ou *oriental* d'autant de degrés pour un azimut de *moins* ce nombre de degrés.

20. DÉTERMINATION DE LA MÉRIDIENNE ET DE L'AXE DU MONDE

Cas général. — Pour déterminer les coordonnées (A_o, H_o) de l'axe du monde dans le cas le plus général, on observera les coordonnées polaires (A_1, H_1), $(A_2\ H_2)$, (A_3, H_3) d'une même étoile à trois instants différents. Ces couples de coordonnées satisfont à l'équation générale du cône, ce qui permet d'écrire le système

$$\begin{aligned} a \cos A_1 + b \sin A_1 + c \operatorname{tg} H_1 &= d \operatorname{séc} H_1, \\ a \cos A_2 + b \sin A_2 + c \operatorname{tg} H_2 &= d \operatorname{séc} H_2, \\ a \cos A_3 + b \sin A_3 + c \operatorname{tg} H_3 &= d \operatorname{séc} H_3 \end{aligned}$$

de trois équations homogènes à quatre inconnues (a, b, c, d).

Les trois premières inconnues sont des paramètres directeurs de l'axe du monde ; on sait comment en déduire les coordonnées polaires (A_o, H_o) de cette droite.

Dans une recherche scientifique sérieuse, on ne se contentera pas du nombre minimum de trois observations d'une même étoile. D'observations plus nombreuses on déduira un système d'équations linéaires en a, b, c qu'on traitera par l'une des méthodes de la théorie des erreurs.

Cas particulier. — Supposons que deux des observations, par exemple les deux premières, aient été faites sous une même hauteur : $H_1 = H_2$. Les deux équations correspondantes, soustraites l'une de l'autre, donnent :

$$a (\cos A_1 - \cos A_2) + b (\sin A_1 - \sin A_2) = 0,$$

ou

$$\frac{a}{b} = \operatorname{cotg} \frac{A_1 + A_2}{2}.$$

Mais

$$\frac{a}{b} = \frac{\cos A_o \cos H_o}{\sin A_o \cos H_o} \quad \text{ou} \quad \operatorname{cotg} A_o ;$$

de sorte que

$$A_o = \frac{A_1 + A_2}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{A_1 + A_2}{2} + 180^\circ.$$

Il pouvait, du reste, paraître évident que les intersections d'un almicantarat et du cône diurne d'une étoile appartiennent à deux verticaux symétriques par rapport au méridien ; c'est ce qu'exprime l'égalité ci-dessus.

L'observation d'une même étoile lors de ses deux passages à une même hauteur suffit donc à la détermination du méridien : c'est la méthode des hauteurs correspondantes.

Le méridien déterminé, il suffira, pour y fixer l'axe du monde, d'appliquer la proposition suivante, évidente par raison de symétrie : l'axe du monde en un point est la bissectrice de l'angle formé par les directions d'une même étoile à ses deux passages dans le méridien.

On calera donc dans le méridien $\frac{A_1 + A_2}{2}$ le cercle des hauteurs d'un théodolite ; on observera, à un demi-jour sidéral d'intervalle, les hauteurs H′ et H″ d'une étoile circompolaire :

$$H_o = \frac{H' + H''}{2}.$$

Les nuits peuvent être trop courtes pour que cette méthode soit applicable avec une lunette ordinaire ; on appliquera alors la méthode générale.

21. PROBLÈMES SUR LE MOUVEMENT DIURNE

Les problèmes ci-dessous auraient pu se proposer à la suite du numéro relatif au mouvement diurne ; on les a retardés jusqu'ici pour profiter des simplifications introduites par le choix de l'origine des azimuts :

$$A_o = 0.$$

Nous noterons φ la hauteur de l'axe du monde. L'équation du cône diurne d'une étoile dont la demi-ouverture est V se réduit ainsi à

$$\cos\varphi \cos A + \cos\varphi \operatorname{tg} H = \cos V \operatorname{séc} H.$$

PROBLÈME I. — *Pour une hauteur φ de l'axe du monde, et une demi-ouverture V, quelle est la hauteur de l'étoile lorsque son azimut est A ?*

On tire H de l'équation ci-dessus.

Application numérique. — Par quelle hauteur H l'étoile *(Aldébaran)* pour laquelle

$$V = 73^\circ 39' 9''$$

traverse-t-elle le vertical $A = 35^\circ$, pour un point terrestre (Louvain) où

$$\varphi = 50^\circ 51' 49'' ?$$

L'équation du problème résulte de l'élimination de l'inconnue auxiliaire M entre les deux équations

$$\operatorname{tg} M = \operatorname{cotg}\varphi \cos A, \qquad \sin(H + M) = \frac{\cos V \cos M}{\sin\varphi}$$

(ou deux équations analogues) qui se prêtent au calcul logarithmique.

$\log \operatorname{cotg}\varphi = \bar{1}.\,910\,224$	$\log \cos V = \bar{1}.\,449\,420$
$\log \cos A = \bar{1}.\,913\,365$	$\log \cos M = \bar{1}.\,920\,248$
$\log \operatorname{tg} M = \bar{1}.\,823\,589$	$\operatorname{colog} \sin\varphi = 0.\,110\,234$
$M = 33^\circ\,40'\,14''$	$\log \sin(H + M) = \bar{1}.\,479\,902$
$H + M = 17^\circ\,34'\,24''$	ou $180^\circ - 17^\circ\,34'\,24''$
$H = -16^\circ\,5'\,50''$	ou $128^\circ\,45'\,22''$.

L'étoile considérée traverse le demi-vertical $A = 35^\circ$ sous l'horizon. La seconde solution signifie que l'étoile traverse le demi-vertical opposé à $A = 35^\circ$ par une hauteur de

$$180^\circ - 137^\circ\,57'\,34'' = 51^\circ\,14'\,38''.$$

En particulier : a) A quelle hauteur l'étoile traverse-t-elle le méridien du lieu ?

Dans ce plan $A = 0$, à condition de compter les hauteurs à partir du nord de la méridienne (nous pourrions aussi bien dire $A = \pi$, en comptant les hauteurs à partir du sud de la méridienne) :

$$\cos \varphi + \sin \varphi \operatorname{tg} H = \cos V \operatorname{séc} H,$$

d'où

$$\cos (\varphi - H) = \cos V$$

et

$$H = \varphi \pm V ;$$

ce sont les hauteurs maximum et minimum de l'étoile.

b) A quelle hauteur l'étoile traverse-t-elle le premier vertical ? Dans ce plan $\cos A = 0$ et

$$\sin H = \frac{\cos V}{\sin \varphi} ;$$

discutant ce résultat, on voit dans quelles conditions le phénomène se réalise 0, 1 ou 2 fois par jour sidéral ; dans le cas d'un passage, $H = \pm 90^\circ$; dans le cas de deux passages, les deux hauteurs, mesurées à partir d'un même point cardinal, sont supplémentaires.

Problème II. — *Pour une hauteur* φ *de l'axe du monde, et une demi-ouverture* V, *quel est l'azimut de l'étoile lorsque sa hauteur est* H ?

On tire A de l'équation du cône diurne ; on obtient, par un cosinus, deux valeurs symétriques de A :

$$\cos A = \frac{\cos V}{\cos \varphi \cos H} - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} H :$$

les phénomènes proposés s'accomplissent (lorsque A est réel) dans des verticaux symétriques par rapport au méridien, — ce qui était évident.

Application numérique. — Par quel azimut *Aldébaran* ($V = 73^\circ\,39'\,9''$) atteint-il à Louvain ($\varphi = 50^\circ\,52'\,49''$) une hauteur $H = 48^\circ$? (1)

$$\operatorname{colog}\cos\varphi = 0.\,200\,010 \qquad \log \operatorname{tg}\varphi = 0.\,089\,766$$

$$\operatorname{colog}\cos H = 0.\,174\,489 \qquad \log \operatorname{tg} H = \underline{0.\,045\,563}$$

$$\log\cos V = \overline{1}.449\,420 \qquad \log m = 0.\,135\,329$$

$$\log n = \overline{1}.\,823\,919 \qquad \log\left(1 - \frac{n}{m}\right) = \underline{\overline{1}.\,709\,108}$$

$$\operatorname{colog} m = \overline{1}.\,864\,671 \qquad \log(m - n) = \overline{1}.\,844\,437$$

$$\log\frac{n}{m} = \overline{1}.\,688\,590$$

$$180^\circ - A = \pm\, 45^\circ\,39'\,27''$$

$$A = \pm\, 134^\circ\,20'\,34''$$

En particulier, quels sont les azimuts du lever et du coucher de l'étoile ?

A ces instants $H = 0$, et

$$\cos A = \frac{\cos V}{\cos\varphi}.$$

Discutant ce résultat, on voit à quelle condition l'étoile est circompolaire (visible ou invisible), et à quelle condition le lever et le coucher sont confondus (nécessairement sur la méridienne).

---

(1) Pour éviter la nécessité de rendre monômes les formules trigonométriques, nous ferons usage des *logarithmes d'addition et de soustraction.* Ces fonctions permettent le calcul de $\log(m + n)$ et de $\log(m - n)$, où m est plus grand que n, au moyen de $\log m$ et de $\log n$ Les tables qui les expriment donnent $\log(1 + x)$ et $\log(1 - x)$ en fonction de $\log x$. Le calcul se dispose donc de la manière suivante, $\frac{n}{m}$ jouant le rôle de x :

$$\log\frac{n}{m} = \log n + \operatorname{colog} m \qquad \begin{cases} \log(m + n) = \log m + \log\left(1 + \frac{n}{m}\right), \\ \log(m - n) = \log m + \log\left(1 - \frac{n}{m}\right). \end{cases}$$

Par exemple, calcul des azimuts du lever et du coucher d'*Aldébaran* ($V = 73°39'9''$) à Louvain ($\varphi = 50°52'49''$) :

$$\log \cos V = \overline{1}.449\,420$$
$$\operatorname{colog} \cos \varphi = \underline{0.200\,010}$$
$$\log \cos A = \overline{1}.649\,430$$
$$A = \pm 63°30'23''$$

Problème III. — *Si* t_0 *est l'indication d'une horloge à l'instant du passage d'une étoile dans le méridien supérieur,* $(t_0 + s)$ *l'indication de la même horloge un jour sidéral plus tard, et* V *la demi-ouverture du cône diurne de cette étoile, quelles sont les coordonnées polaires horizontales de celle-ci à l'instant* t ?

A l'instant t_0, la normale au plan de l'axe du monde et de l'étoile est l'axe Y. L'angle P, fonction uniforme du temps,

$$P = 2\pi \frac{t - t_0}{s} \text{ rad.} = 360 \frac{t - t_0}{s} \text{ degrés},$$

se réduit donc à l'angle que fait, à l'instant t, l'axe Y avec la normale au plan de l'axe du monde et de l'étoile. Si (a, b, c) sont les cosinus directeurs de la normale à ce plan,

$$\text{ang cos } b = P.$$

Les coefficients de l'équation

$$a \cos A + b \sin A + c \operatorname{tg} H = 0$$

de ce plan satisfont donc aux conditions

$$b = \cos P, \qquad a + c \operatorname{tg} \varphi = 0, \qquad a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

et cette équation peut s'écrire, après choix d'un signe,

$$\sin \varphi \cos A + \operatorname{cotg} P \sin A - \cos \varphi \operatorname{tg} H = 0.$$

D'autre part, A et H sont liés par l'équation du cône diurne de l'étoile :

$$\cos \varphi \cos A + \sin \varphi \operatorname{tg} H = \cos V \operatorname{séc} H.$$

Les coordonnées de l'intersection de ce plan et de ce cône pourraient se déduire des formules établies dans les *Préliminaires*. Pour éviter d'y remonter, ou de les rétablir, on éliminera A entre les deux équations, pour obtenir

$$\sin H = \sin \varphi \cos V \pm \cos \varphi \sin V \cos P, \qquad (1)$$

puis H, pour obtenir

$$\operatorname{cotg} A = \pm \operatorname{cotg} V \frac{\cos \varphi}{\sin P} - \sin \varphi \operatorname{cotg} P. \qquad (2)$$

Le choix du signe se fait sans difficulté, en examinant comment H varie avec P, et comment A varie avec V.

A qui trouverait cette résolution pénible on pourrait indiquer l'artifice suivant : effectuer le changement de coordonnées qui, conservant l'axe Y et le sens du système, amène l'axe Z dans la direction nord de l'axe du monde, de manière que les coordonnées courantes soient $(180^\circ - P)$ et $(90^\circ - V)$; calculer H comme complément de la distance de l'étoile à la direction zénithale, dont les coordonnées nouvelles sont 0 et $(90^\circ + \varphi)$; d'autre part, A est l'angle que fait avec l'axe Y la normale au vertical de l'étoile, dont les paramètres directeurs sont les déterminants tirés du tableau

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & -\operatorname{cotg} \varphi \\ -\cos P & \sin P & \operatorname{cotg} V \end{matrix} \right\|.$$

Application numérique. — L'horloge est réglée de façon que

$$s = 23^h56^m4^s,09 = 86\,164^s,09 ;$$

on demande les coordonnées horizontales d'*Aldébaran* ($V = 73^\circ39'9''$) à Louvain ($\varphi = 50^\circ52'49''$), à l'instant où

$$t - t_0 = 5^h30^m = 19\,800^s.$$

Calcul de P.

$$\log 360 = 2.\,556\,303$$
$$\log (t - t_0) = 4.\,296\,665$$
$$\operatorname{colog} s = \overline{5}.\,064\,674$$
$$\log P = 1.\,917\,642 \qquad P = 82^\circ43'33'',6$$

Calcul de H (sin H = $m + n$, signe + car P et H varient en sens contraires).

$$\log \sin \varphi = \bar{1}.\ 889\ 766 \qquad \log \cos \varphi = \bar{1}.\ 799\ 990$$

$$\log \cos V = \bar{1}.\ 449\ 420 \qquad \log \sin V = \bar{1}.\ 982\ 078$$

$$\log m = \bar{1}.\ 339\ 186 \qquad \log \cos P = \bar{1}.\ 102\ 483$$

$$\log n = \bar{2}.\ 884\ 551$$

$$\operatorname{colog} m = 0.\ 660\ 814$$

$$\log n = \bar{2}.\ 884\ 551$$

$$\log \frac{n}{m} = \bar{1}.\ 545\ 365$$

$$\log m = \bar{1}.\ 339\ 186$$

$$\log \left(1 + \frac{n}{m}\right) = 0.\ 130\ 667$$

$$\log (m + n) = \bar{1}.\ 469\ 853 = \log \sin H$$

$$H = 17°9'32''$$

Calcul de A (cotg A = $+ m - n$, signe + car V et A varient dans le même sens).

$$\log \cos \varphi = \bar{1}.\ 799\ 990 \qquad \log \sin \varphi = \bar{1}.\ 889\ 766$$

$$\operatorname{colog} \sin P = 0.\ 003\ 509 \qquad \operatorname{colog} \operatorname{tg} P = \bar{1}.\ 105\ 993$$

$$\operatorname{colog} \operatorname{tg} V = \bar{1}.\ 467\ 343 \qquad \log n = \bar{2}.\ 995\ 759$$

$$\log m = \bar{1}.\ 270\ 842$$

$$\operatorname{colog} m = 0.\ 729\ 158$$

$$\log n = \bar{2}.\ 995\ 759$$

$$\log \frac{n}{m} = \bar{1}.\ 724\ 917$$

$$\log m = \bar{1}.\ 270\ 842$$

$$\log \left(1 - \frac{n}{m}\right) = \bar{1}.\ 910\ 319$$

$$\log (m - n) = \bar{1}.\ 181\ 161 = \log \operatorname{cotg} A$$

$$A = 81°22'14''.$$

PROBLÈME IV. — *Si* t_0 *est l'indication d'une horloge à l'instant du passage d'une étoile dans le méridien supérieur,* $(t_0 + s)$ *l'indication de la même horloge un jour sidéral plus tard, et* V *la demi-ouverture du cône diurne de l'étoile, quelle est l'indication* t *de l'horloge à l'instant où l'une des coordonnées horizontales de l'étoile a telle valeur donnée ?*

Suivant que l'on donne la hauteur H ou l'azimut A, on tirera P de la formule (1) ou (2) ci-dessus (p. 63). Puis

$$t = t_0 + \frac{Ps}{2\pi} + ks \quad \text{ou} \quad t_0 + \frac{Ps}{360} + ks,$$

suivant que P a été exprimé en radians ou en degrés, et k étant un entier quelconque, positif, nul ou négatif.

Application numérique I. — Quelle est, à Louvain ($\varphi = 50°52'49''$), la variation de l'indication de l'horloge pour laquelle

$$s = 23^h56^m4^s,09 = 86\,164^s,09$$

de l'instant où la hauteur d'*Aldébaran* ($V = 73°39'9''$) est maximum, à celui où cette hauteur est égale à $44°20'$?

$$\cos P = \frac{\sin H}{\cos \varphi \sin V} - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} V$$

$$\operatorname{colog} \cos \varphi = 0.\ 200\ 010 \qquad \log \operatorname{tg} \varphi = 0.\ 089\ 766$$

$$\operatorname{colog} \sin V = 0.\ 017\ 922 \qquad \log \operatorname{cotg} V = \overline{1}.\ 467\ 343$$

$$\log \sin H = \overline{1}.\ 844\ 372 \qquad \log n = \overline{1}.\ 557\ 109$$

$$\log m = 0.\ 062\ 304$$

$$\operatorname{colog} m = \overline{1}.\ 937\ 696 \qquad \log m = 0.\ 062\ 304$$

$$\log n = \overline{1}.\ 557\ 109 \qquad \log\left(1 - \frac{n}{m}\right) = \overline{1}.\ 837\ 294$$

$$\log \frac{n}{m} = \overline{1}.\ 494\ 805 \qquad \log (m - n) = \overline{1}.\ 899\ 598$$

$$P = 37°28'39'' \quad \text{et} \quad 322°31'21''$$

$$t - t_0 = 2^h29^m30^s,04 \quad \text{et} \quad 21^h26^m34^s,05.$$

Application numérique II. — Quelle est, à Louvain ($\varphi = 50°52'49''$), la variation de l'indication de l'horloge pour laquelle .

$$s = 23^h56^m4^s,09 = 86\,164^s,09$$

de l'instant où l'azimut d'*Aldébaran* ($V = 73°39'9''$) est égal à 180°, à celui où cet azimut est égal à 125°12′ ?

L'équation

$$\operatorname{cotg} A = \operatorname{cotg} V \frac{\cos \varphi}{\sin P} - \sin \varphi \operatorname{cotg} P$$

résulte de l'élimination de M entre, par exemple,

$$\operatorname{tg} M = \sin \varphi \operatorname{tg} A \quad \text{et} \quad \sin (P + M) = \frac{\cos \varphi \operatorname{tg} A \cos M}{\operatorname{tg} V}.$$

$$\begin{array}{rr} \log \sin \varphi = \overline{1}.\,889\,766 & \log \cos \varphi = \overline{1}.\,799\,990 \\ \log \operatorname{tg} (180° - A) = 0.\,151\,551 & \log \operatorname{tg} (180° - A) = 0.\,151\,551 \\ \log \operatorname{tg} (180° - M) = 0.\,041\,317 & \log \operatorname{cotg} V = \overline{1}.\,467\,343 \\ M = 132°16'43'' & \log \cos (180° - M) = \overline{1}.\,869\,155 \\ & \log \sin (P + M) = \overline{1}.\,288\,039 \\ & P + M = 168°48'27'' \end{array}$$

$$P = 36°31'44''$$

$$t - t_0 = 2^h\,25^m42^s,80.$$

En particulier, quels sont les instants t *du lever et du coucher de l'étoile ?*

Ici $H = 0$, et

$$t = t_0 + \frac{s}{360} \operatorname{ang\,cos} \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} V} \right) + ks.$$

Par exemple, pour l'horloge, l'étoile et le lieu terrestre des applications numériques précédentes :

$$\begin{array}{rr} \log \operatorname{tg} \varphi = 0.\,089\,766 & \\ \log \operatorname{cotg} V = \overline{1}.\,467\,343 & \\ \log \cos P = \overline{1}.\,557\,109 & \\ P = 68°51'31'',37 & \text{et} \quad 291°8'28'',63 \\ t - t_0 = 4^h34^m41^s,00 & \text{et} \quad 19^h21^m23^s,09. \end{array}$$

22. LIMITE INFÉRIEURE DES DISTANCES DES ÉTOILES

Plusieurs observateurs, opérant dans le voisinage de la surface de la Terre, concluent aux mêmes lois du mouvement diurne, quelque grandes que soient leurs distances mutuelles.

Rapprochant leurs résultats, ils constatent :

1° que les axes du monde, relatifs à tous les points de la surface de la Terre, sont *parallèles ;*

2° que le jour sidéral est une durée indépendante du point d'observation ;

3° que la distance angulaire de deux étoiles quelconques est invariable : de l'un à l'autre de deux points terrestres, les parallaxes stellaires observées sont toujours nulles.

Si les instruments employés étaient parfaits, la dernière loi conduirait à la conclusion suivante : la surface de la Terre est le lieu des points d'où l'on voit sous un angle constant le segment rectiligne limité par les deux étoiles observées, — c'est-à-dire une surface de révolution autour de la droite à laquelle appartient ce segment et engendrée par un arc de circonférence limité par les deux étoiles. Mais ceci est impossible, car il faudrait tirer la même conclusion pour tout groupe de deux étoiles ; et toutes les pareilles surfaces relatives à tous les groupes de deux étoiles n'ont qu'un point commun. De l'un à l'autre de deux points terrestres, les parallaxes stellaires sont, non pas nulles, mais inobservables ; la cause en est l'imperfection des instruments : la différence des distances angulaires est moindre que la moindre différence observable.

En réalité, dire que la distance angulaire de deux étoiles est θ, à ϵ près, pour tous les points de la surface de la Terre, c'est dire qu'aucun de ces points n'est extérieur à la portion d'espace limitée par deux surfaces de révolution définies comme ci-dessus et correspondant à des angles constants $(\theta - \epsilon)$ et $(\theta + \epsilon)$; et dire qu'il en est de même quelles que soient les deux étoiles observées,

c'est dire qu'aucun des points de la surface de la Terre n'est extérieur à la partie d'espace commune à toutes les pareilles portions déduites de tous les groupes possibles de deux étoiles. Cette partie d'espace est d'autant plus étendue que les étoiles les plus proches sont plus éloignées et que ϵ est plus grand.

On en conclut, inversement, que les distances des étoiles les plus proches sont d'autant plus grandes que les points terrestres d'observation sont plus éloignés et que ϵ est moindre.

Pour soumettre ce problème au calcul, supposons (fig. 7) deux étoiles, A, A', également éloignées de l'observateur placé en O, et

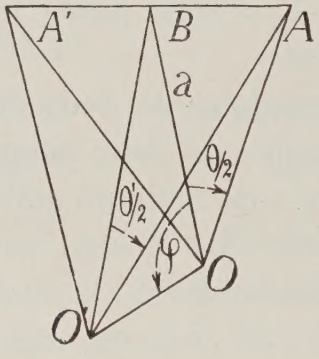

FIG. 7

observées sous un angle θ ; soit a la distance OB du point O à la droite joignant les deux étoiles : la distance du point O à chaque étoile est $\left(a : \cos\frac{\theta}{2}\right)$.

Un second observateur est en O', dans le plan contenant la droite OB et perpendiculaire au plan OAA'. La droite $\overrightarrow{OO'}$ fait avec la droite $\overrightarrow{OB}$ un angle φ, et la distance OO' est égale à d. Par rapport au point O', la distance angulaire des deux astres est θ'.

La question est la suivante : sachant que la différence des distances angulaires θ et θ' est au plus égale à l'approximation ϵ, trouver la limite inférieure de a, en fonction de θ, φ et d.

Ces quantités sont liées par l'égalité

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\theta'}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}} = \frac{\frac{a}{d}}{\sqrt{1-2\frac{a}{d}\cos\varphi+\left(\frac{a}{d}\right)^2}}$$

qui, entière et rationnelle, s'écrit :

$$\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} - \operatorname{tg}^2\frac{\theta'}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{\theta'}{2}}\left(\frac{a}{d}\right)^2 + 2\cos\varphi\left(\frac{a}{d}\right) - 1 = 0.$$

Pour fixer les idées, supposons θ' moindre que θ quel que soit d, d'où $\varphi \geqslant 90^\circ$. Si nous posons

$$\theta' = \theta - \epsilon,$$

c'est-à-dire si nous supposons que la limite supérieure de l'approximation a été atteinte, l'équation en $(a : d)$ donnera la limite inférieure de ce rapport. De plus, ϵ étant très petit vis-à-vis de θ, nous pouvons développer, suivant ϵ, le coefficient de $(a : d)^2$, et limiter le développement au terme du premier degré. L'équation en $(a : d)$ se simplifie alors jusque

$$\frac{2\epsilon}{\sin\theta}\left(\frac{a}{d}\right)^2 + 2\cos\varphi\left(\frac{a}{d}\right) - 1 = 0 ;$$

ses racines sont réelles et de signes contraires ; la racine positive est la limite inférieure cherchée du rapport $(a : d)$; elle augmente indéfiniment lorsque ϵ tend vers zéro.

Supposons, par exemple,

$$\theta = 30^\circ, \quad \varphi = 135^\circ, \quad \epsilon = 0'',5 ;$$

on aurait :

$$a = 72\,926 \times d,$$

et la distance aux étoiles observées serait au moins égale à

$$\frac{72\,926 \times d}{\cos(\theta : 2)} = 75\,500 \times d.$$

Les distances des étoiles les plus rapprochées sont donc très grandes par rapport aux plus grandes distances terrestres.

CHAPITRE II

COORDONNÉES ÉQUATORIALES HORAIRES

23. L'ÉQUATEUR CÉLESTE

L'*équateur céleste* est le plan passant par l'origine des coordonnées et perpendiculaire à l'axe du monde. Le méridien du lieu est donc le seul vertical perpendiculaire à l'équateur.

L'équateur céleste et l'horizon se coupent suivant la ligne est-ouest.

Les équateurs célestes relatifs à tous les points voisins de la surface de la Terre sont parallèles.

L'équateur divise l'espace en deux demi-espaces, dits *hémisphères ;* celui qui contient l'étoile polaire et, par suite, la direction nord de l'axe du monde s'appelle *nord, boréal* ou *arctique ;* l'autre s'appelle *sud, austral* ou *antarctique.*

Sur la sphère céleste, l'équateur céleste est le grand cercle qui a pour pôles les pôles célestes ; il rencontre le grand cercle horizon aux deux points cardinaux est et ouest, et divise la sphère céleste en deux hémisphères appelés nord (boréal, arctique) ou sud (austral, antarctique) suivant le nom du pôle céleste qui contient chacun d'eux.

24. COORDONNÉES ÉQUATORIALES HORAIRES

Axes coordonnés. — Un point accessible à l'œil de l'observateur étant choisi pour origine O, les axes du système des coordonnées équatoriales se définissent comme suit :

1° L'axe Z est l'*axe du monde* relatif à l'origine, dirigé vers le *pôle céleste nord.* Ainsi le plan XY est l'équateur céleste relatif à

ce point. Les plans passant par l'axe sont des *méridiens ;* les cônes de révolution autour de l'axe du monde sont des *parallèles.*

2° L'axe X est la droite d'*intersection de l'équateur et du méridien,* dirigée positivement dans le méridien supérieur.

3° Le système est *rétrograde* (droitier). L'axe Y est donc dirigé vers l'ouest, comme celui des coordonnées horizontales.

Coordonnées polaires. — 1° L'angle de position s'appelle ici l'*angle horaire astronomique* (ou, simplement, angle horaire) ; il s'exprime habituellement en heures. L'*angle horaire civil* est l'angle d'équateur céleste, moindre que 12 h., mesuré, dans le sens droitier, soit depuis l'axe X, soit depuis la direction opposée, jusqu'à la projection de la direction considérée ; il est donc égal à l'angle horaire astronomique ou à celui-ci diminué de 12 h. suivant que cet angle est inférieur ou supérieur à 12 h.

2° L'angle de pente est ici la *déclinaison.* On dit souvent une déclinaison *boréale* d'autant de degrés pour une déclinaison de *plus* ce nombre de degrés ; et une déclinaison *australe* d'autant de degrés pour une déclinaison de *moins* ce nombre de degrés.

La *distance polaire nord* est le complément de la déclinaison ; la *distance polaire sud* est le supplément de la distance polaire nord.

Par définition d'une étoile, la déclinaison d'un pareil astre est constante.

Coordonnées horaires et coordonnées horizontales. — Cherchons les formules de transformation des coordonnées rectilignes horaires (x_e, y_e, z_e) et horizontales (x_h, y_h, z_h). Soit φ la hauteur du pôle élevé, mesurée à partir de la direction nord de la méridienne (axe X_h). — Les axes Y_e, Y_h sont communs : le passage du système X_hZ_h au système X_eZ_e se fait par une rotation d'amplitude $[-(90^\circ - \varphi)]$ et par un changement de direction de l'axe X ; d'où

$$\begin{cases} x_h = -x_e \sin\varphi + z_e \cos\varphi, \\ y_h = \quad y_e, \\ z_h = \quad x_e \cos\varphi + z_e \cos\varphi, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} x_e = -x_h \sin\varphi + z_h \cos\varphi, \\ y_e = y_h, \\ z_e = x_h \cos\varphi + z_h \sin\varphi. \end{cases}$$

Dans le cas particulier où l'axe du monde est dans l'horizon, $\varphi = 0$, et ces formules se réduisent à

$$x_h = z_e, \qquad y_h = y_e, \qquad z_h = x_e.$$

25. ÉQUATORIAL

L'*équatorial* est un instrument ternaire complet propre à la mesure des coordonnées polaires équatoriales horaires. Son axe ternaire est théoriquement dirigé suivant l'axe du monde, et les lectures sur ses cercles gradués (cercle horaire, cercle des déclinaisons) sont théoriquement nulles lorsque sa ligne de visée principale est dirigée suivant l'intersection de l'équateur céleste et du méridien supérieur du lieu.

CHAPITRE III

COORDONNÉES ÉQUATORIALES STELLAIRES

26. COORDONNÉES ÉQUATORIALES STELLAIRES

La déclinaison de toute étoile est constante, mais son angle horaire croît proportionnellement au temps. Le nouveau système de coordonnées équatoriales a pour objet, tout en gardant la déclinaison, de remplacer l'angle horaire de toute étoile par une coordonnée qui ne varie pas avec le temps. Toutes les directions des étoiles se déplaçant comme un ensemble indéformable, la solution du problème consiste dans l'adoption, pour l'axe X, d'une direction qui, appartenant à cet ensemble, se déplace avec lui, comme le ferait la direction d'une étoile de déclinaison nulle.

La création d'un pareil système permettra de dresser un *catalogue d'étoiles,* tableau en trois colonnes renfermant, la première le nom de chaque étoile (ou son numéro d'ordre, ou un signe distinctif quelconque), la deuxième la nouvelle coordonnée à définir, la troisième la déclinaison.

Axes coordonnés. — Un point accessible à l'œil de l'observateur étant choisi pour origine O, les axes du système des coordonnées équatoriales stellaires se définissent comme suit :

1° L'axe Z est celui des coordonnées équatoriales stellaires, *axe du monde dans sa direction nord ;* le plan XY est donc encore l'équateur céleste.

2° L'axe X est une droite dirigée de l'équateur céleste, et liée à la gerbe stellaire ; elle parcourt donc l'équateur d'un mouvement uniforme, en un jour sidéral, et dans le sens rétrograde pour un observateur debout sur l'équateur, la tête dans la direction nord de l'axe du monde ; sa définition sera précisée plus tard ; nous l'appellerons le *rayon* γ.

3° Le système est *direct* (gaucher).

Coordonnées polaires. — 1° L'angle de position s'appelle ici l'*ascension droite.*

2° L'angle de pente est la *déclinaison* des coordonnées équatoriales horaires.

Une direction dont l'ascension droite et la déclinaison sont données est complètement déterminée si on connaît la position du rayon ♈ au même instant.

Les coordonnées équatoriales stellaires des astres non étoiles (soleil, astres errants) sont variables et données, pour des instants suffisamment rapprochés, dans des tables appelées *éphémérides*, publiées annuellement. Les principales éphémérides sont la *Connaissance des Temps* (Paris), le *Nautical Almanac* (Greenwich), l'*American Ephemeris* (Washington).

27. ÉQUATORIAL A MOUVEMENT DIURNE

Un équatorial à mouvement diurne est un équatorial dont l'axe, et par suite le cercle horaire et le cercle des déclinaisons, peuvent prendre, sous l'action d'un mécanisme d'horlogerie ou d'un poids moteur avec régulateur à ailettes, un mouvement de rotation autour de l'axe du monde, uniforme et d'un tour complet en un jour sidéral. Que son mécanisme ait acquis une vitesse constante à l'instant où le rayon ♈ passe dans le méridien supérieur du lieu, et qu'à cet instant le zéro de son cercle horaire passe aussi dans le méridien supérieur : cet instrument permettra à tout instant la mesure de l'ascension droite et de la déclinaison d'un astre avec la direction duquel la ligne de visée aura été amenée en coïncidence ; calé pour une ascension droite et une déclinaison quelconques, sa ligne de visée principale décrira un cône de révolution autour de l'axe du monde, et si, à un instant, l'axe optique passe par une étoile, cette étoile continuera de lui appartenir.

28. TEMPS SIDÉRAL

L'uniformité du mouvement du rayon ♈ rend le déplacement de celui-ci propre à la mesure du temps : *le temps sidéral est l'angle horaire du rayon* ♈.

Une *heure sidérale* est la vingt-quatrième partie d'un jour sidéral, de sorte qu'il s'écoule douze heures sidérales entre deux passages consécutifs du rayon γ dans le méridien du lieu ; le temps sidéral passe de 0 à 24 h. pendant la durée d'un jour sidéral. L'heure sidérale se divise en soixante *minutes sidérales,* et la minute sidérale en soixante *secondes sidérales.*

L'*horloge sidérale* indique théoriquement l'angle horaire du rayon γ à chaque instant ; elle devrait donc marquer 0 h. 0 m. 0 s., 0 aux instants du passage du rayon γ au méridien supérieur du lieu ; 12 h. 0 m. 0 s , 0 aux instants de son passage au méridien inférieur ; 6 h. 0 m. 0 s., 0 et 18 h. 0 m. 0 s., 0 aux instants de ses passages à la ligne est-ouest. Dans la pratique, le temps sidéral T ne peut être qu'une certaine fonction de la lecture θ de la pendule sidérale au même instant. Si l'horloge est bonne, cette fonction peut être remplacée par son développement en série suivant les puissances de θ, limité au terme du premier degré :

$$T = a + b\theta,$$

a et b, voisins respectivement de 0 et de 1, étant invariables pendant une durée d'autant plus longue que l'horloge est meilleure.

29. ANGLE HORAIRE ET ASCENSION DROITE

Notations. — T_{ag} est l'angle horaire astronomique de l'astre a, en un point terrestre noté g ; en particulier, $T_{\gamma g}$ est le temps sidéral en ce point.

A_a est l'ascension droite de l'astre a ; elle est indépendante, à chaque instant, du point pris pour origine des coordonnées.

En notant Os la droite dirigée origine des angles horaires, $O\gamma$ la droite dirigée origine des ascensions droites, Oa' la projection sur l'équateur de la direction de l'astre a :

$$T_{ag} = (\overrightarrow{sa'}), \qquad T_{\gamma g} = (\overrightarrow{s\gamma}), \qquad A_a = (\overleftarrow{\gamma a'}).$$

Théorème. — *A 24 heures près, le temps sidéral est égal à l'ascension droite de tout astre augmentée de l'angle horaire de celui-ci.*

On a, en effet, identiquement, avec k entier, positif, nul ou négatif,

$$\overrightarrow{(sa')} + \overrightarrow{(a\,\Upsilon)} + \overrightarrow{(\Upsilon s)} = 2k\pi,$$

ou

$$\overrightarrow{(sa')} + \overleftarrow{(\Upsilon a')} - \overrightarrow{(s\Upsilon)} = 2k\pi,$$

ou

$$T_{\Upsilon g} + A_a - T_{\Upsilon g} = 2k\pi.$$

On peut toujours mesurer les angles de manière que k vaille 0 ou 1 ; et

$$T_{\Upsilon g} = A_a + T_{ag}\ (-0 \text{ ou } -24 \text{ h}).$$

Corollaire I. — *A l'instant de son passage au méridien supérieur, l'ascension droite d'un astre est égale au temps sidéral.*

Car, à cet instant, $T_{ag} = 0$ ou 24 h ; de sorte que

$$T_{\Upsilon g} = A_a.$$

Corollaire II. — *A chaque instant, la somme de l'ascension droite et de l'angle horaire de tout astre est une constante, à 24 heures près.*

En appliquant successivement la relation générale à deux astres a, b, et en éliminant le temps sidéral entre les deux égalités obtenues, on trouve :

$$A_a + T_{ag} = A_b + T_{bg}\ (+0 \text{ ou } \pm 24 \text{ h}).$$

Application. — Connaissant, à un instant déterminé, l'angle horaire et l'ascension droite d'un astre a, en déduire, à cet instant, l'angle horaire d'un astre quelconque b, dont un catalogue ou une éphéméride donne l'ascension droite.

De la dernière égalité on tire :

$$T_{bg} = T_{ag} + A_a - A_b,(+0 \text{ ou } \pm 24 \text{ h}).$$

De ces trois résultats, on adopte celui qui est compris entre 0 et 24 h.

Corollaire III. — *La différence des angles horaires de deux astres est, à 24 heures près, égale et de signe contraire à la différence de leurs ascensions droites.*

Car l'égalité obtenue au corollaire précédent peut s'écrire :

$$T_{ag} - T_{bg} = -(A_a - A_b), (+ 0 \text{ ou } \pm 24 \text{ h}).$$

30. INSTRUMENTS MÉRIDIENS

Le mode d'installation de l'équatorial, non symétrique par rapport à la verticale, entraîne dans les différentes pièces de cet instrument des déformations variables avec les coordonnées de l'astre observé ; c'est une cause d'erreur dans la mesure de ces coordonnées.

L'équatorial n'est donc conservé que comme instrument de première approximation. Pour des mesures aussi précises que possible, on a recours aux *instruments méridiens*.

Les instruments méridiens sont des instruments binaires dont l'axe est théoriquement dirigé suivant la ligne est-ouest, de manière que leur ligne de visée principale décrive théoriquement le plan du méridien. Les instruments méridiens employés naguère étaient le *cercle mural* et la *lunette méridienne* : ces deux instruments sont remplacés aujourd'hui presque partout par un instrument unique, le *cercle méridien*.

Le cercle mural est un cercle portant une lunette en diamètre et tournant, autour d'un axe horizontal et de direction est-ouest, dans un coussinet encastré dans un pilier en maçonnerie. Cet instrument était employé pour la mesure de la hauteur, et, par suite, de la déclinaison des astres à leur passage dans le méridien. Mais son axe de rotation n'est réalisé matériellement que sur un court segment, et il suffit d'une déviation inappréciable de cet axe pour écarter sensiblement du méridien le plan décrit par sa ligne de visée principale. L'inconvénient est faible pour la mesure des hauteurs, celles-ci variant peu très près du méridien, où elles sont

au voisinage de leurs maxima et de leurs minima ; mais l'erreur peut devenir grande dans l'appréciation des instants des passages au méridien, pour la mesure des ascensions droites. Ceci fit inventer la lunette méridienne, instrument binaire sans cercle gradué ; son axe, de direction est-ouest, tourne dans deux coussinets encastrés dans des piliers en maçonnerie, ou dans deux montants métalliques appuyés sur de pareils piliers. La figure 3 (page 41) renferme un schéma de lunette méridienne transportable. La théorie du cercle mural et celle de la lunette méridienne peuvent s'emprunter à la théorie du cercle méridien.

Le *cercle méridien* est l'instrument binaire complet dont l'axe est dirigé suivant la ligne est-ouest. Appliquons-lui la théorie générale des instruments binaires. La ligne de visée principale rencontre théoriquement l'axe de rotation et lui est théoriquement perpendiculaire ; leur point d'intersection est l'origine des coordonnées. Prenons pour axe des z_2 l'axe de rotation dirigé vers l'ouest. Le cercle est gradué de manière que ses lectures soient théoriquement 0 et (+ *1 droit*) lorsque la ligne de visée est dirigée respectivement dans le méridien supérieur et dans le sens nord de l'axe du monde. Supposons ces conditions réalisées et adoptons ces directions respectivement pour axes des x_2 et des y_2. Dans une étude complète de l'instrument, ces conditions ne pourraient être supposées réalisées. Pour des constantes réticulaires P′, P″, Q′, Q″, des lectures micrométriques η, et une lecture l sur le cercle gradué, nous savons que les coordonnées polaires de l'astre observé sont, par rapport à ces axes,

$$\alpha = l + P'\xi + P''\eta, \qquad \delta = Q'\xi + Q''\eta.$$

Premier problème. — Avec les données précédentes, on demande les *coordonnées équatoriales horaires* (T, D) de l'astre observé. Pour transformer le système d'axes binaires de l'instrument dans le système des axes équatoriaux horaires OXYZ, il suffit de remplacer Ox_2 par OX, Oy_2 par OZ et Oz_2 par OY. Les formules de transformation sont donc :

$$X = x_2, \qquad Y = z_2, \qquad Z = y_2,$$

ou, en coordonnées polaires,

$$\cos T \cos D = \cos \alpha \cos \delta,$$
$$\sin T \cos D = \sin \delta,$$
$$\sin D = \sin \alpha \cos \delta.$$

δ étant un angle petit, ces équations peuvent s'écrire, à l'approximation habituelle :

$$\cos T \cos D = \cos \alpha \quad \text{ou} \quad \cos (l + P'\xi + P''\eta),$$
$$\sin T \cos D = \delta \quad \text{ou} \quad (Q'\xi + Q''\eta),$$
$$\sin D = \sin \alpha \quad \text{ou} \quad \sin (l + P''\xi + P''\eta).$$

A la même approximation, ce système est satisfait par

$$\begin{cases} D = l + P'\xi + Q''\eta, \\ T = (Q'\xi + Q''\eta) \text{ séc } l, \end{cases}$$

et par

$$\begin{cases} D = 180^\circ - (l + P'\xi + P''\eta), \\ T = (Q'\xi + Q''\eta) \text{ séc } l - 12 \text{ h}. \end{cases}$$

Ces deux solutions sont équivalentes. Pour ne pas faire sortir les déclinaisons de l'intervalle (-90°, $+90^\circ$), on a l'habitude d'appliquer la première solution aux observations faites dans le voisinage du méridien supérieur, et la deuxième aux observations faites dans le voisinage du méridien inférieur.

Deuxième problème. — Avec les données précédentes, on demande *l'ascension droite* A de l'astre observé.

On sait que le passage de l'angle horaire T, fourni par le problème précédent, à l'ascension droite A exige l'emploi d'une pendule sidérale bien réglée, l'ascension droite d'un astre étant, à 24 h. près, égale à l'excès du temps sidéral sur l'angle horaire de l'astre.

Soient donc θ la lecture à la pendule sidérale à l'instant de l'observation, a et b les coefficients par lesquels le temps sidéral T est fonction de θ :

$$T = a + b\theta ;$$

on aura, à 24 h. près,

$$A = a + b\theta - T$$

c'est-à-dire, à 24 h. près,

$$A = a + b\theta - (Q'\xi + Q''\eta) \text{ séc } l,$$

ou

$$A = a + b\theta - (Q'\xi + Q''\eta) \text{ séc } l + 12 \text{ h.},$$

suivant que l'astre est voisin du méridien supérieur ou du méridien inférieur.

Détermination des constantes instrumentales. — Les formules par lesquelles on passe des résultats bruts de l'observation (l, ξ, η, θ) aux coordonnées équatoriales stellaires de l'astre observé (A, D) renferment six constantes instrumentales qu'il reste à déterminer : les deux constantes (a, b) de la pendule et les quatre constantes réticulaires (P', P'', Q', Q'').

Cette détermination ne présente, en principe, aucune difficulté. Observons deux fois une même étoile (A, D), par exemple dans le voisinage du méridien supérieur, et soient

$$(l', \xi', \eta', \theta') \qquad \text{et} \qquad (l'', \xi'', \eta'', \theta'')$$

les résultats bruts de ces deux observations ; on peut écrire :

$$\begin{cases} D = l' + P'\xi' + P''\eta' \\ D = l'' + P'\xi'' + P''\eta'' \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} A = a + b\theta' - (Q'\xi' + Q''\eta') \text{ séc } l' \\ A = a + b\theta'' - (Q'\xi'' + Q''\eta'') \text{ séc } l'' ; \end{cases}$$

par élimination de D et de A :

$$\begin{cases} l' + P'\xi' + P''\eta' = l'' + P'\xi'' + P''\eta'', \\ b\theta' - (Q'\xi' + Q''\eta') \text{ séc } l' = b\theta'' - (Q'\xi'' + Q''\eta'') \text{ séc } l''. \end{cases}$$

Chaque observation double fournit ainsi une équation linéaire en P', P'', et une équation en b, Q', Q''. Un nombre suffisant d'observations doubles, et l'application de l'une des méthodes de la théorie des erreurs permettent donc le calcul des meilleures

valeurs de ces cinq constantes instrumentales. a échappant à cette détermination, il faut le déduire, après calcul des autres constantes, de l'instant du passage d'une étoile dont l'ascension droite est connue (étoile fondamentale) ; écartant toute difficulté, on se contente souvent de rappeler que le temps sidéral est égal à l'ascension droite de toute étoile, lors du passage de celle-ci dans le méridien supérieur, et d'en déduire l'avance ou le retard de l'horloge sidérale.

Dans la pratique, les astronomes emploient des procédés d'une exécution plus simple, tels que le *réglage du réticule* de manière que P' soit égal à zéro. Ces méthodes ne pourront être étudiées que dans la partie pratique du Cours d'Astronomie. Ici, nous avons supposé l'instrument parfait et parfaitement installé ; mais dans la partie pratique du Cours, nous devrons aussi évaluer et faire entrer dans les formules l'obliquité de la ligne de visée principale sur le plan perpendiculaire à l'axe de rotation *(collimation)*, que nous avons supposée nulle, ainsi que la hauteur *(inclinaison)* et l'azimut *(déviation azimutale)* de l'axe de rotation que nous avons considérées respectivement comme nulle et égale à $\pm$ 90°. En particulier, la collimation se détermine au moyen d'une lunette, dite collimateur, permettant de faire jouer à un signal lumineux le rôle d'une étoile extrêmement éloignée, et l'inclinaison de l'axe se mesure au moyen du *niveau à bulle* ou par l'observation du décalage des fils réticulaires par rapport à leur image après réflexion sur un *bain de mercure* amené au pied de l'instrument.

DEUXIÈME PARTIE

COORDONNÉES GÉOCENTRIQUES

CHAPITRE PREMIER

LA TERRE

31. LE GÉOIDE

Considérons l'ensemble des points voisins de la surface de la Terre, et l'ensemble des verticales de tous ces points.

Admettons que l'ensemble des verticales soit un ensemble de normales, c'est-à-dire que par tout point de l'espace passe une surface perpendiculaire à la verticale de chacun de ses points. Nous chercherons plus tard la condition pour qu'il en soit ainsi, et nous vérifierons que cette condition est satisfaite. Chacune de ces surfaces s'appelle une *surface de niveau*. Par chaque point voisin de la surface terrestre passe donc une surface de niveau ; et une pareille surface est parfaitement définie par son passage en un point (n° 97).

Si la mer était en équilibre (par rapport à la Terre), sa surface appartiendrait à une surface de niveau. Pour acquérir la notion de *surface moyenne de la mer*, considérons la verticale d'un point quelconque A voisin de la surface de la mer et constamment au-dessus de celle-ci. La distance du point A au point où sa verticale perce la surface liquide est une fonction du temps qui reste comprise entre deux certaines limites. Représentons-nous un instru-

ment qui donne cette distance à chaque instant. Pour une durée d'observation de plus en plus longue, la moyenne des distances mesurées tend vers une longueur a. Sur la verticale du point A, à partir de celui-ci, portons, vers le bas, cette longueur a ; nous arrivons à un point M que nous dirons, par définition, appartenir à la *surface moyenne de la mer*.

La surface moyenne de la mer est extrêmement proche d'une surface de niveau. Mais la définition, toute théorique, de cette surface moyenne n'est guère applicable dans la réalité ; et il y a une part de convention dans le choix de la surface de niveau considérée comme surface moyenne de la mer.

On donne le nom de *géoïde* à la surface de niveau définie par son passage en un point et adoptée comme surface moyenne de la mer.

Le géoïde choisi, en 1860, pour la construction de la carte de Belgique est la surface de niveau passant à $6^{m},2835$ en-dessous de la tablette extrémité nord du bajoyer est de l'écluse du Bassin du Commerce à Ostende. Il est défini de manière à se confondre avec le géoïde adopté, en 1820, pour la construction de la carte de France.

32. LE GÉOIDE SPHÉRIQUE

Il résulte de la définition du géoïde que la première idée de la forme de la Terre s'acquerra par l'observation de la surface de la mer.

Pour un observateur situé à une distance quelconque au-dessus de la surface de la mer, la surface, appelée *horizon visuel,* engendrée par une droite passant par son œil, et astreinte à rester tangente à la surface de la mer est, à première vue, *un cône de révolution autour de la verticale.* L'observateur en conclut que *le géoïde est sensiblement sphérique,* et que la verticale de tout point passe par le centre de cette sphère.

La *dépression* (fig. 8) est la hauteur, prise en valeur absolue, d'une génératrice quelconque de l'horizon visuel. Lors de la mesure, en mer, d'une hauteur au sextant, cette hauteur est

comptée à partir de l'intersection du vertical de l'astre observé et de l'horizon visuel : la hauteur lue est donc exagérée de la dépression, et doit en être corrigée.

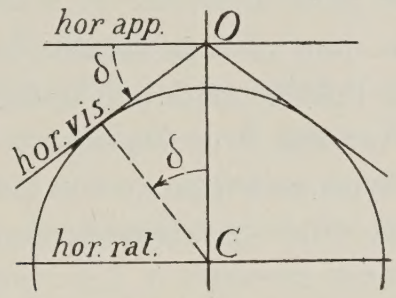

FIG. 8. — Vertical du point O.

Avec, en première approximation, la Terre sphérique et de rayon a, et l'observateur élevé de h au-dessus de la mer, l'angle de dépression δ est tel que

$$\cos \delta = \frac{a}{a+h}.$$

Cette formule permet de corriger de la dépression les hauteurs prises au sextant, lorsque a est connu (1).

Mais, d'un autre côté, nous pourrions mesurer directement la dépression, en observant l'horizon visuel, d'un point de la côte, au moyen d'un théodolite élevé de h au-dessus de la surface de la

---

(1) Dans la pratique, on emploie :

$$\sin \frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{h}{2(a+h)}},$$

ou, en limitant au terme du premier degré le développement de $\sin^2 \frac{\delta}{2}$ suivant les puissances de la quantité petite $\frac{a}{h}$:

$$(\delta)'' = \frac{1}{\sin 1''} \sqrt{\frac{2h}{a}}.$$

mer ; δ et h connus, nous pourrions, dans la formule précédente, considérer a comme l'inconnue, et en tirer :

$$a = h \frac{\cos \delta}{1 - \cos \delta}.$$

Pour une raison que nous verrons bientôt, bien que la Terre ne se déforme pas et que l'observateur soit immobile, l'angle δ sera mesuré par un angle variable avec la pression atmosphérique, la température et l'état hygrométrique de l'air à l'instant de l'observation ; de plus, la moindre variation de l'angle provoque une grande variation du rayon terrestre a. Les résultats de nos observations et de nos calculs ne nous donneront donc qu'une première idée, toute provisoire, de la grandeur de la Terre.

Supposons que l'observateur, élevé de 12 mètres au-dessus de la surface de la mer, prenne des mesures de δ variant de 340 à 380″, avec 369″ pour moyenne d'un grand nombre de mesures. Ses calculs lui donneront :

pour δ = 340″, R = 8 832 600 m. ;
pour δ = 369″, R = 7 499 052 m. ;
pour δ = 380″, R = 7 071 312 m.

Horizons. — Pour chaque point voisin de la surface de la Terre, on distingue, outre l'*horizon visuel* (fig. 8) :

l'*horizon apparent,* plan perpendiculaire à la verticale de ce point et passant par celui-ci ; c'est le plan XY du système des coordonnées horizontales ;

l'*horizon rationnel,* plan perpendiculaire à la verticale et passant par le centre du géoïde sphérique.

33. COORDONNÉES ÉQUATORIALES TERRESTRES

Axes coordonnés. — Adoptons le centre de la Terre comme origine O ; les axes du système des coordonnées équatoriales terrestres se définissent comme suit :

1° L'axe Z est l'axe du monde relatif au centre de la Terre,

dirigé vers le pôle céleste nord. C'est donc la paralèle, passant par le centre, à tous les axes du monde relatifs aux points de la surface : cet axe du monde particulier est l'*axe terrestre ;* il perce le géoïde en deux points nommés *pôles terrestres :* le pôle *nord, boréal* ou *arctique* dans la direction nord, et le pôle *sud, austral* ou *antarctique* dans la direction sud.

Le plan XY est donc l'équateur céleste relatif au centre de la Terre : c'est l'*équateur terrestre ;* il coupe le géoïde suivant un grand cercle de même nom, ayant pour pôles les pôles terrestres, et le divise en deux *hémisphères,* chacun de même nom que le pôle qu'il renferme.

Les plans contenant l'axe Z sont les *méridiens terrestres ;* leurs grands cercles d'intersection avec le géoïde sphérique portent le même nom. La tangente en tout point d'un méridien est la projection de l'axe du monde sur l'horizon de ce point.

Les cônes de révolution autour de l'axe Z coupent le géoïde suivant de petits cercles, dits *parallèles ;* ils doivent leur nom à ce que leurs plans sont parallèles entre eux et à l'équateur.

2° Le plan XZ, appelé *premier méridien,* est arbitrairement choisi : c'est le méridien passant par un point déterminé (le centre du cercle méridien) de tel observatoire ; ce sera, pour nous, l'observatoire de *Greenwich ;* nous y dirigerons l'axe X de manière qu'il fasse un angle aigu avec la direction géocentrique de cet observatoire (sa direction positive rencontre ainsi la surface terrestre dans le golfe de Guinée).

3° Le système est *rétrograde* (droitier).

Coordonnées polaires. — 1° L'angle de position s'appelle ici la *longitude.* On dit souvent *longitude occidentale* d'autant de degrés pour une longitude de *plus* ce nombre de degrés, — *longitude orientale* d'autant de degrés pour une longitude de *moins* ce nombre de degrés.

2° L'angle de pente s'appelle ici la *latitude.* On dit souvent latitude d'autant de degrés *nord* pour une latitude de *plus* ce nombre de degrés, — latitude d'autant de degrés *sud* pour une latitude de *moins* ce nombre de degrés.

La *colatitude nord* est le complément de la latitude ; la *colatitude sud* est le supplément de la colatitude nord.

3° Pour fixer la position d'un point terrestre sur son rayon, il faut une troisième coordonnée équivalente au rayon vecteur : si M_1 est l'intersection (la plus voisine) du géoïde et de la verticale du point M, l'*altitude* du point M est le segment M_1M de cette verticale dirigée vers le zénith ; l'altitude d'un point est donc positive ou négative, suivant que son rayon vecteur est supérieur ou inférieur au rayon du géoïde.

Deux points terrestres sont dits *antipodes* s'ils sont situés sur un même diamètre terrestre, de part et d'autre du centre : leurs longitudes diffèrent de 180°, et leurs latitudes sont symétriques (on peut dire aussi : leurs longitudes sont égales, et leurs latitudes diffèrent de 180°).

Si un point M a une longitude λ, une latitude φ et une altitude h, ses coordonnées rectangulaires dans le système équatorial terrestre sont évidemment, avec a rayon du géoïde sphérique :

$$x = (a + h) \cos \lambda \cos \varphi,$$
$$y = (a + h) \sin \lambda \cos \varphi,$$
$$z = (a + h) \sin \varphi.$$

34. LATITUDE ET HAUTEUR DU POLE

Théorème. — *La latitude d'un lieu, mesurée à partir de sa projection sur l'équateur, est égale à la hauteur de la direction nord de l'axe du monde en ce lieu, mesurée à partir de la direction nord de la méridienne.*

Cette proposition résulte immédiatement de la définition de ses termes : ces définitions sont rappelées dans la figure 9 pour deux points de latitude φ et φ' ; on a accentué toutes les notations relatives au second point.

Ne considérant que les valeurs absolues et moindres que 90° de ces angles, on dit souvent : la latitude d'un lieu est égale à la

hauteur du pôle élevé en ce lieu ; elle est nord ou sud en même temps que le pôle élevé.

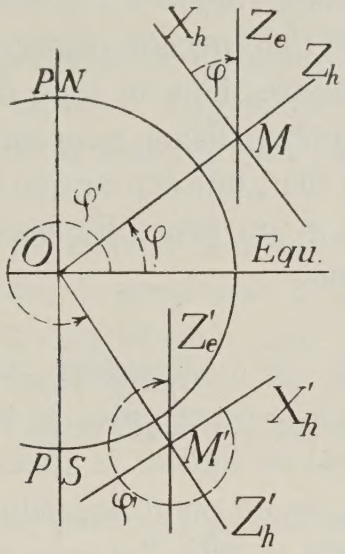

FIG. 9. — Méridien des points M, M'.

Détermination de la latitude. — D'après le théorème précédent, la détermination de la latitude se confond avec la mesure de la hauteur du pôle céleste, par exemple au théodolite.

Si on connaît la déclinaison (90° — V) de l'astre observé, il suffit d'une seule observation dans le méridien : la latitude φ est égale à la hauteur H de l'astre, mesurée à partir de la direction nord de la méridienne, diminuée ou augmentée de la distance

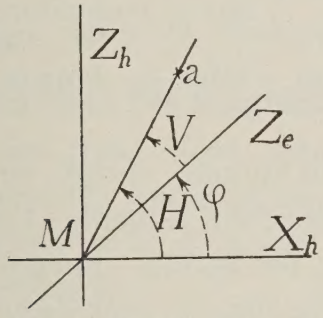

FIG. 10. — Méridien du point M.

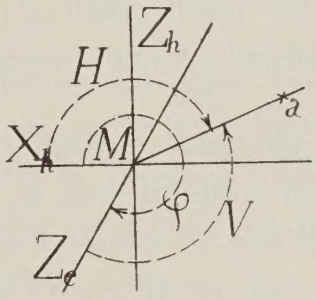

FIG. 11. — Méridien du point M.

polaire nord V de l'astre, suivant que l'observation se fait dans le méridien supérieur (fig. 10) ou dans le méridien inférieur (fig. 11) :

$$\varphi = H \pm V.$$

La déclinaison (90° — V) se lit dans un catalogue stellaire ou se tire d'une éphéméride, après calcul de l'instant du passage.

Au sextant, on observe l'étoile à l'instant où sa hauteur est maximum ou minimum ; en mer, on néglige ainsi la petite erreur due à la vitesse du navire dans le sens du méridien. On agit habituellement de la même façon pour un astre autre qu'une étoile ; d'où encore, en mer, une erreur due à la valeur de V mise en jeu dans le calcul, et un peu différente de la valeur de V à l'instant de l'observation.

Mouvement diurne. — Inversement, la connaissance de la latitude d'un lieu suffit à se représenter le mouvement diurne en ce lieu : on pourra ainsi se figurer la sphère étoilée au pôle, en un point de l'équateur, en un point de latitude quelconque.

Au *pôle nord* (latitude + 90°), l'axe du monde, dirigé vers le nord, se confond avec la verticale dirigée vers le zénith ; l'équateur céleste se confond avec l'horizon ; les cercles diurnes des étoiles sont parallèles à l'horizon et décrits dans le sens rétrograde.

En un point quelconque de l'*hémisphère terrestre nord,* le mouvement diurne, projeté sur l'horizon, est rétrograde.

A l'*équateur* (latitude nulle), l'axe du monde se confond avec la méridienne, avec coïncidence de leurs directions nord ; l'équateur céleste contient la verticale ; les cercles diurnes des étoiles sont dans des plans perpendiculaires à l'horizon.

En un point quelconque de l'*hémisphère terrestre sud,* le mouvement diurne, projeté sur l'horizon, s'effectue dans le sens direct.

Au *pôle sud* (latitude —90°), l'axe du monde, dirigé vers le nord, se confond avec la verticale dirigée vers le nadir ; l'équateur céleste se confond avec l'horizon ; les cercles diurnes des étoiles sont parallèles à l'horizon et décrits dans le sens direct.

De l'un à l'autre pôle, à une variation de la latitude correspond une égale variation de la hauteur de l'axe du monde.

35. THÉORÈME DES LONGITUDES

Lemme. — En deux points d'un même méridien terrestre, la différence des angles horaires d'un même astre (en dehors de l'axe du monde) à un même instant, tend vers zéro lorsque l'astre s'éloigne indéfiniment.

Car cette différence est égale à la distance angulaire des deux points d'observation pour la projection de l'astre sur l'équateur.

Si un astre est assez éloigné pour que l'angle sous lequel on voit, de sa projection sur l'équateur, les deux points d'observation, soit inférieur à l'approximation des mesures, ce théorème devient :

L'angle horaire d'un astre de parallaxe pratiquement nulle pour un déplacement quelconque à la surface de la Terre, n'est pratiquement fonction que de l'époque et de la longitude du lieu d'observation : le long d'un même méridien, il est, à chaque instant, indépendant de la latitude du lieu d'observation. Lorsque nous aurons pu définir le rayon γ, nous verrons que cette proposition s'applique à son angle horaire, le temps sidéral.

C'est ce qui justifie la notation $T_{a\lambda}$ de l'angle horaire de l'astre a (et $T_{\gamma\lambda}$ du temps sidéral) en un point quelconque de longitude λ : ainsi T_{a0} est l'angle horaire de l'astre a (et $T_{\gamma 0}$ le temps sidéral) sur le méridien initial.

Théorème des longitudes. — *La différence des angles horaires en deux lieux d'un même astre,* de parallaxe nulle pour un déplacement quelconque à la surface de la Terre, *est égale, à 24 heures près, à moins la différence des longitudes des points d'observation.*

En effet, par un point quelconque S (fig. 12) de l'espace, menons les droites dirigées m_0, m_1, m_2, parallèles aux intersections de l'équateur terrestre et, respectivement, du méridien initial, du méridien du lieu de première observation, et du méri-

dien du lieu de seconde observation ; puis, par le même point, la droite dirigée a parallèle à la projection équatoriale de la direction de l'astre en chaque lieu d'observation.

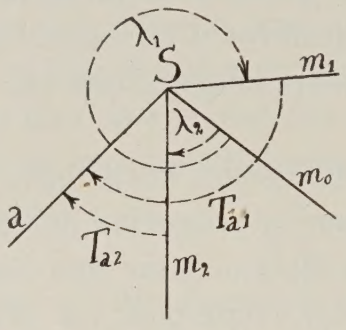

FIG. 12. — Plan parallèle à l'équateur.

Par définition, dans le sens rétrograde,

$(m_0m_1) = \lambda_1$, longitude du premier lieu,

$(m_0m_2) = \lambda_2$, longitude du second lieu,

$(m_1a) = T_{a_1}$, angle horaire de l'astre au premier lieu,

$(m_2a) = T_{a_2}$, angle horaire de l'astre au second lieu.

On a, avec k entier, positif, nul ou négatif,

$$(m_1m_0) + (m_0m_2) = (m_1a) + (am_2) + 2k\pi,$$

ou

$$\lambda_2 - \lambda_1 = T_{a_1} - T_{a_2} + 2k\pi.$$

Les angles peuvent toujours être mesurés de manière que k vaille 0 ou -1 :

$$\lambda_2 - \lambda_1 = T_{a_2} - T_{a_1} + (0 \text{ ou } 24 \text{ h.}).$$

En particulier, supposons $\lambda_1 = 0$, et écrivons λ pour λ_2 :

$$\lambda = T_{a\lambda} - T_{ao} + (0 \text{ ou } 24 \text{ h.}) ;$$

la longitude d'un lieu est égale, à 24 heures près, à la différence des angles horaires d'un même astre (de parallaxe nulle) *en ce lieu et sur le méridien initial.*

Si l'astre a est remplacé par le rayon vernal γ,

$$\lambda = T_{\gamma\lambda} - T_{\gamma o} + (0 \text{ ou } 24 \text{ h.}),$$

d'où

$$T_{\gamma o} = T_{\gamma\lambda} - \lambda + (0 \text{ ou } 24 \text{ h.});$$

le temps sidéral sur le méridien initial est égal, à 24 h. près, à l'excès du temps sidéral en un point quelconque sur la longitude de ce point.

36. TRANSPORT DES SYSTÈMES DE COORDONNÉES AU CENTRE DE LA TERRE

Coordonnées locales ou apparentes, géocentriques ou rationnelles. — La relation simple établie au théorème précédent n'est immédiatement applicable qu'à des astres dont la parallaxe est pratiquement nulle pour un déplacement quelconque à la surface de la Terre. On pourra cependant l'employer pour les autres astres, à condition de supposer les observations effectuées du centre de la Terre ; alors, en effet, le centre de la Terre pourra être pris pour point S de la démonstration ci-dessus et celle-ci restera valable. Il faudra donc faire subir aux résultats des observations une correction de parallaxe, pour le passage de tel point de la Terre au centre de celle-ci. Ainsi, le plan fondamental des coordonnées horizontales deviendra l'horizon rationnel, — et le plan fondamental des coordonnées équatoriales se confondra avec le plan de l'équateur terrestre.

Pareille opération constitue le passage d'un système de coordonnées *locales* ou *apparentes* au système des coordonnées *géocentriques, rationnelles* ou *vraies* de même nom. Le plan XY des coordonnées horizontales géocentriques est donc l'horizon rationnel ; celui des coordonnées équatoriales (horaires ou stellaires) géocentriques, le plan de l'équateur terrestre.

Un angle horaire géocentrique, une ascension droite géocentrique, une longitude sont des coordonnées mesurées dans le

même plan ; pour passer de l'une à l'autre, il suffit de connaître les positions relatives de leurs directions initiales.

La déclinaison géocentrique et la latitude terrestre d'une direction issue du centre de la Terre sont confondues.

Hauteurs géocentriques. — A titre d'exemple, appliquons la correction de parallaxe à une hauteur H mesurée dans un système local de coordonnées horizontales, pour obtenir la hauteur H′ du même point dans le système parallèle géocentrique.

Les composantes du déplacement de l'origine sont (0, 0, rayon terrestre a). La formule approchée de parallaxe, relative à la variation de l'angle de pente, donne donc ici :

$$H' = H + \frac{a}{\rho} \cos H,$$

où ρ est la distance de l'astre au lieu d'observation. Mais la formule de parallaxe relative à la variation du rayon vecteur montre que cette variation est nulle à l'approximation actuelle ; et ρ est aussi bien la distance de l'astre au centre de la Terre.

Avec la seconde pour unité dans le terme correctif,

$$H' = H + \left(\frac{1}{\sin 1''} \cdot \frac{a}{\rho} \cos H\right)''.$$

Parallaxe horizontale. — Si on suppose l'astre dans l'horizon apparent, $H = 0$ et la correction de hauteur se réduit à $\frac{a}{\rho}$. C'est pourquoi le rapport du rayon terrestre à la distance géocentrique de l'astre s'appelle la *parallaxe horizontale*.

La connaissance de la parallaxe horizontale p à un instant est équivalente à celle de la distance de l'astre à cet instant lorsque a est connu, car $\rho = a : p$. La parallaxe horizontale d'un astre à un instant peut être considérée comme la mesure, en radians, de l'angle sous lequel, du centre de cet astre, et à cet instant, on verrait, à la distance de la Terre, un segment rectiligne transversal égal au rayon terrestre : c'est pourquoi, habituellement, cette mesure est exprimée en secondes.

Coordonnées terrestres et coordonnées stellaires géocentriques. — Cherchons les formules de passage des coordonnées terrestres (x_t, y_t, z_t) aux coordonnées stellaires géocentriques, et inversement.

Les axes Z_t, Z_s sont confondus. De X_s à X_t, l'axe X tourne d'un angle $(-\theta_o)$, θ_o étant le temps sidéral sur le méridien initial. Les plans XY sont orientés dans des sens différents.

Les formules demandées sont donc :

$$x_t = x_s \cos\theta_o + y_s \sin\theta_o,$$
$$y_t = x_s \sin\theta_o - y_s \cos\theta_o,$$
$$z_t = z_s,$$

et

$$x_s = x_t \cos\theta_o + y_t \sin\theta_o,$$
$$y_s = x_t \sin\theta_o - y_t \cos\theta_o,$$
$$z_s = z_t.$$

37. RAYON DU GÉOIDE SPHÉRIQUE

Le problème de la grandeur du géoïde sphérique ne comporte qu'une seule inconnue : le rayon a du géoïde. Ce rayon a résulte immédiatement des deux grandeurs suivantes :

1° la longueur s d'un arc de grand cercle du géoïde ;

2° l'angle α que font les verticales des extrémités de cet arc.

En effet, avec α exprimé en radians,

$$a = \frac{s}{\alpha}.$$

Dans la pratique, on choisit le plus souvent un arc de *méridien :* l'angle des verticales de ses extrémités est égal à la différence des latitudes de ces points.

Triangulation. — La mesure directe d'un arc de méridien est généralement impossible. On effectue alors une *triangulation.*

Soient (fig. 13) A et L les deux points extrêmes de l'arc de méridien à mesurer ; de part et d'autre de cet arc, on choisit des points B, C, D, ... dits *points géodésiques* ou *sommets,* tels que de chacun d'eux on puisse apercevoir les points voisins avec une netteté suffisante à la mesure de leurs distances angulaires. On forme ainsi, de A à L, une chaîne de triangles à peu près équilatéraux ; on mesure :

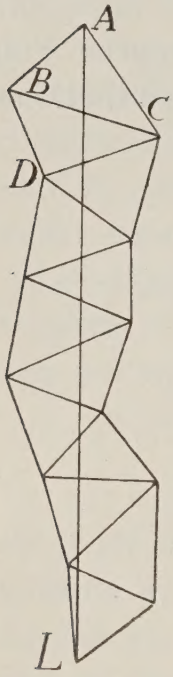

FIG. 13.

1° tous leurs angles,

2° l'angle que fait un de leurs côtés avec la méridienne du point où il rencontre l'arc à mesurer,

3° la longueur d'un de leurs côtés, auquel on donne le nom de *base.*

Ces éléments suffisent au calcul de chacun des tronçons de méridien limités aux côtés des triangles de la chaîne. La somme de ces tronçons est égale, à très peu près, à l'arc proposé.

Pour un arc déterminé, les triangles de la chaîne doivent, en principe, être aussi peu nombreux que possible ; les côtés seront donc aussi grands que possible. Dans la pratique, on s'arrête à une longueur moyenne de 30 km. Le plus long côté de la triangulation belge est de 51 km. (Anvers-Gand).

Mesure de la base. — Il est encore généralement impossible d'effectuer la mesure directe de 20 ou 30 km., côté d'un triangle de la chaîne. On mesure donc, dans un site favorable, une droite de faible longueur, comme 2 km., dite *base mesurée.* Par une suite de triangles de dimensions croissantes, on la rattache à un côté de triangle de la chaîne, dit alors *base calculée* (en Belgique, bases de Nieuport et de Lommel).

La base se mesurait jadis au moyen de règles métalliques à corriger de la dilatation (règles bimétalliques). Aujourd'hui, on emploie de préférence des fils à tension constante, en métal très peu dilatable, comme l'invar, acier à 36 % de nickel.

Signaux. — En pays de plaines, les tours et les clochers constituent d'excellents sommets. En pays de montagnes, il faut souvent élever des constructions temporaires.

Un bon signal est constitué par un miroir convenablement orienté, et réfléchissant les rayons solaires dans la direction de l'observateur : c'est l'*héliotrope*.

Mesure des angles. — Les angles se mesurent, projetés sur l'horizon, au moyen d'un théodolite dont l'axe appartient à la verticale du sommet. Lorsqu'on adopte pour sommet une construction préexistante, il est rare que cette mise en station soit rigoureusement possible ; il faut alors faire subir aux résultats des observations de petites corrections : cette opération constitue la *réduction au centre de station*.

D'une station provisoire S′ on a mesuré l'azimut α' d'un signal P, et l'azimut φ de la station définitive S. On connaît aussi les distances respectives ρ et r de ces deux points. On demande l'azimut α de la direction SP.

Le rapport $(r : \rho)$ étant petit, on peut appliquer la formule de parallaxe relative à la variation de l'angle de position pour un changement d'origine dont les composantes sont $(-r\cos\varphi, -r\sin\varphi, 0)$. On obtient :

$$\alpha = \alpha' - \frac{r}{\rho}\sin(\varphi - \alpha').$$

Excès sphérique. — Les axes des théodolites aux différentes stations ne sont pas parallèles, mais théoriquement perpendiculaires au géoïde. Les angles mesurés sont donc des angles de triangles sphériques ; et la somme des angles de chaque triangle est un peu supérieure à deux droits. On les ramène cependant à des angles de triangles plans par application du *théorème* suivant.

Considérons un triangle sphérique d'angles A, B, C, et dont l'excès sphérique $A + B + C - 2\pi = 3\omega$ soit une petite fraction de radian. *Parmi les triangles plans qui ont pour angles* $(A - \omega)$,

$(B - \omega)$, $(C - \omega)$, *il y en a un dont les côtés ont, aux quantités petites du second ordre près, des longueurs égales aux longueurs des côtés du triangle sphérique proposé.*

Vérification. — Il convient de mesurer une seconde base dans le voisinage de l'extrémité de l'arc, et d'en déduire, par triangles croissants, la longueur d'un côté de l'un des derniers triangles de la chaîne. Cette longueur doit être égale, à telle approximation, à la longueur calculée au moyen de tous les triangles précédents,

Résultats. — A cause de leur importance historique, nous citerons de préférence les deux résultats suivants.

1. Arc du Pérou, mesuré en 1735 :

distance = 176 876 toises,
diff. des lat. = 3°7′3″ = 0,054 411 rad.,

$$R = \frac{176\,876}{0{,}054\,441} = 3\,250\,740 \text{ toises.}$$

2. Arc de Suède, mesuré en 1802 :

distance = 92 778 toises,
diff. des lat. = 1°37′20″ = 0,028 313 rad.,

$$R = \frac{92\,778}{0{,}028\,313} = 3\,276\,870 \text{ toises.}$$

38. LE GÉOIDE ELLIPSOIDAL DE RÉVOLUTION

Les arcs du Pérou et de Suède ont été mesurés à peu près avec la même précision. La discordance des résultats est trop grande pour pouvoir être attribuée uniquement aux erreurs d'observation. L'hypothèse du géoïde sphérique est donc insuffisante.

Les exemples ci-dessus (qui auraient pu être multipliés) montrent que le rayon de courbure moyen d'un arc de méridien est plus grand aux latitudes élevées que dans le voisinage de l'équateur.

Un ellipsoïde de révolution autour de son petit axe vérifie cette condition. C'est cette surface qui est attribuée au géoïde en deuxième approximation.

Dans cette hypothèse, la verticale d'un point ne se confond plus avec la droite qui joint ce point au centre du géoïde ; mais les projections équatoriales de ces deux droites sont confondues.

La surface étant de révolution, la tangente en tout point d'un méridien est encore la projection de l'axe du monde sur l'horizon de ce point.

La définition des coordonnées équatoriales terrestres reste applicable au cas d'un géoïde ellipsoïdal de révolution ; mais on remplace le terme *latitude* par l'expression *latitude géocentrique,* par opposition à l'angle analogue qui va être défini.

La *latitude géographique* d'un point voisin de la surface de la Terre est la latitude géocentrique de la verticale de ce point, dirigée vers l'extérieur du géoïde ; sa valeur absolue est donc celle de l'angle aigu que fait cette verticale avec sa projection sur l'équateur ; moindre que 90° en valeur absolue, elle est positive ou négative suivant que le point appartient à l'hémisphère nord ou à l'hémisphère sud.

Le théorème sur l'égalité de la latitude et de la hauteur du pôle élevé reste vrai pour la latitude géographique.

L'*angle à la verticale* en un point est l'excès de la latitude géographique sur la latitude géocentrique ; sa valeur absolue est donc l'inclinaison du rayon géocentrique sur la verticale.

L'*altitude* d'un point se mesure encore sur la verticale de ce point.

Éléments de l'ellipsoïde. — On pourrait adopter pour éléments de l'ellipsoïde terrestre son demi-grand axe a et son demi-petit axe b. On a l'habitude de considérer le demi-grand axe a et soit l'excentricité $\epsilon = \sqrt{a^2 - b^2} : a$, soit l'aplatissement $(a - b) : a = 1 - \sqrt{1 - \epsilon^2}$.

Par rapport aux axes terrestres équatoriaux, le géoïde ellipsoïdal a pour équation

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{1 - \epsilon^2} = a^2.$$

Problème I. — *On donne : 1° les éléments,* a et ϵ, *de l'ellipsoïde terrestre ; 2° la longitude* λ *et la latitude géographique* φ *d'un point de cet ellipsoïde. — On demande les coordonnées rectangulaires* (x, y, z) *de ce point.*

Les cosinus directeurs de la verticale sont proportionnels aux dérivées partielles du premier membre de l'équation de l'ellipsoïde :

$$\frac{\cos\lambda\cos\varphi}{x} = \frac{\sin\lambda\cos\varphi}{y} = \frac{\sin\varphi}{z : (1 - \epsilon^2)}.$$

Ces deux équations et celle de l'ellipsoïde constituent un système duquel on tire :

$$x = \frac{a\cos\lambda\cos\varphi}{\sqrt{1 - \epsilon^2\sin^2\varphi}},$$

$$y = \frac{a\sin\lambda\cos\varphi}{\sqrt{1 - \epsilon^2\sin^2\varphi}},$$

$$z = \frac{a(1 - \epsilon^2)\sin\varphi}{\sqrt{1 - \epsilon^2\sin^2\varphi}}.$$

Ces égalités sont les équations paramétriques de l'ellipsoïde de révolution, avec (λ, φ) pour coordonnées curvilignes.

Problème II. — *On donne : 1° les éléments,* a *et* ϵ, *de l'ellipsoïde terrestre ; 2° la longitude* λ, *la latitude géographique* φ *et l'altitude* h *d'un point de l'espace. — On demande les coordonnées rectangulaires* (x, y, z) *de ce point.*

Nous connaissons les coordonnées de la projection orthogonale de ce point sur le géoïde. Il faut y ajouter les composantes

$$h\cos\lambda\cos\varphi, \quad h\sin\lambda\cos\varphi, \quad h\sin\varphi$$

de l'altitude suivant les trois axes :

$$x = \left(\frac{a}{\sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 \varphi}} + h\right) \cos \lambda \cos \varphi,$$

$$y = \left(\frac{a}{\sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 \varphi}} + h\right) \sin \lambda \cos \varphi,$$

$$z = \left(\frac{a\,(1 - \epsilon^2)}{\sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 \varphi}} + h\right) \sin \varphi.$$

Telles sont les équations paramétriques, en (λ, φ), d'une surface lieu des points équidistants du géoïde.

Problème III. — *On donne les éléments* (a, ϵ) *de l'ellipsoïde terrestre, et une latitude géographique* φ. — *On demande les coordonnées polaires,* ρ *(rayon vecteur) et* L *(latitude géocentrique) d'un point dont la latitude est* φ, *et l'angle à la verticale en un pareil point.*

La solution est fournie par les égalités

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \rho \cos L, \quad z = \rho \sin L,$$

d'où, au moyen des résultats du problème I ci-dessus,

$$\rho = \sqrt{\frac{1 - \epsilon^2\,(2 - \epsilon^2) \sin^2 \varphi}{1 - \epsilon^2 \sin^2 \varphi}},$$

$$\operatorname{tang} L = (1 - \epsilon^2) \operatorname{tang} \varphi.$$

L'angle à la verticale est $(\varphi - L)$ et

$$\sin (\varphi - L) = \epsilon^2 \sin \varphi \cos L ;$$

après y avoir exprimé cos L au moyen de φ,

$$\sin (\varphi - L) = \frac{\epsilon^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - \epsilon^2\,(2 - \epsilon^2) \sin^2 \varphi}},$$

et $(\varphi - L)$ a le signe de φ.

Développements en série. — Qu'on ait pu d'abord admettre la sphéricité du géoïde témoigne de la petitesse de l'excentricité du géoïde ellipsoïdal. Nous verrons bientôt que ϵ est moindre que 0,08. Or les diverses quantités calculées ci-dessus sont fonctions de ϵ^2, moindre que 0,0064. En les développant en séries suivant les puissances croissantes de ϵ^2, on arrive bientôt à des termes d'extrême petitesse, et négligeables.

Pour fixer les idées, supposons déjà négligeables les termes en ϵ^4, quantité moindre que 0,000041.

Dans ces conditions, sin (φ — L) se réduit à $\frac{\epsilon^2}{2}\sin 2\varphi$. L'angle à la verticale passe par sa valeur absolue maximum pour des latitudes géographiques très proches de $\pm$ 45°, et cette valeur absolue est égale à $\epsilon^2 : 2$.

Coordonnées horizontales et coordonnées terrestres. — Problème IV. — *On donne :* 1° *les coordonnées géographiques* (λ_0, φ_0, h_0) *d'un point terrestre* S ; 2° *les coordonnées rectilignes* (x_h, y_h, z_h) *d'un point quelconque* M *par rapport à un système de coordonnées horizontales ayant le point* S *pour origine ;* 3° *les éléments* (a, ϵ) *du géoïde ellipsoïdal.*

On demande les coordonnées rectilignes terrestres (x_t, y_t, z_t) *du point* M.

Les coordonnées polaires des axes X_h, Y_h, Z_h du système horizontal dans le système terrestre $OX_tY_tZ_t$ sont :

axe Z_h .... λ, φ ;
axe X_h .... λ, $90° + \varphi$;
axe Y_h .... $90° + \lambda$, 0 ;

d'où leurs cosinus directeurs. De plus, les formules obtenues au problème II ci-dessus fournissent les coordonnées rectilignes terrestres de l'origine S des coordonnées horizontales. Ainsi

$$x_t = \left(\frac{a}{\sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 \varphi}} + h + z_h\right) \cos\lambda \cos\varphi - x_h \cos\lambda \sin\varphi - y_h \sin\lambda$$

$$y''_t = \left(\frac{a}{\sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 \varphi}} + h + z_h\right) \sin \lambda \cos \varphi - x_h \sin \lambda \sin \varphi + y_h \cos \lambda,$$

$$z_t = \left(\frac{a(1 - \epsilon^2)}{\sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 \varphi}} + h + z_h\right) \sin \varphi + x_h \cos \varphi.$$

39. DIMENSIONS DU GÉOIDE ELLIPSOIDAL DE RÉVOLUTION

Problème. — *On donne :* 1° *les éléments,* a *et* ϵ, *de l'ellipsoïde terrestre ;* 2° *des latitudes géographiques* φ, φ_1, φ_2.

On demande : 1° *la longueur* s *de l'arc de méridien compris entre l'équateur et le parallèle de latitude* φ ; 2° *la longueur* s *de l'arc de méridien compris entre les parallèles de latitudes* φ_1 *et* φ_2.

1°) On a, le long d'un méridien,

$$ds = d\varphi \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2}$$

$$= a(1 - \epsilon^2)(1 - \epsilon^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}} d\varphi ;$$

de sorte que l'arc demandé

$$s = a(1 - \epsilon^2) \int_o^{\varphi} (1 - \epsilon^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}} d\varphi.$$

Développons en série la fonction à intégrer, et limitons le développement au terme en ϵ^2 :

$$(1 - \epsilon^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2} \epsilon^2 \sin 2\varphi ;$$

d'où, à cette approximation,

$$s = a\left(1 - \frac{\epsilon^2}{4}\right) \varphi - \frac{3}{8} a\epsilon^2 \sin 2\varphi.$$

2°) En appliquant deux fois le résultat précédent,

$$s_1 = a\left(1 - \frac{\epsilon^2}{4}\right)\varphi_1 - \frac{3}{8}a\epsilon^2 \sin 2\varphi_1,$$

$$s_2 = a\left(1 - \frac{\epsilon^2}{4}\right)\varphi_2 - \frac{3}{8}a\epsilon^2 \sin 2\varphi_2 ;$$

et, par soustraction,

$$s = s_1 - s_2 = a\left(1 - \frac{\epsilon^2}{4}\right)(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$- \frac{3}{4}a\epsilon^2 \sin\tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)\cos(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Mesure du géoïde. — Supposons qu'on connaisse φ_1 et φ_2 et qu'on ait mesuré s au moyen d'une triangulation : l'équation ci-dessus permet d'écrire une relation entre a et ϵ^2. Deux pareilles mesures suffisent donc, en principe, à la détermination de ces inconnues.

En voici un exemple numérique.

1. Arc du Pérou :

$\varphi_1 = +\ 0°2'21''$, $\quad \varphi_1 - \varphi_2 = 3°7'3'' = 0{,}054\ 411$ rad.,
$\varphi_2 = -\ 3°4'32''$, $\quad \varphi_1 + \varphi_2 = -\ 3°2'1''$,
$s = 176\ 876$ toises.

2. Arc de Suède :

$\varphi_1 = +\ 67°8'50''$, $\quad \varphi_1 - \varphi_2 = 1°37'20'' = 0{,}028\ 313$ rad.,
$\varphi_2 = +\ 65°31'30''$, $\quad \varphi_1 + \varphi_2 = 132°40'20''$,
$s = 92\ 778$ toises.

Il en résulte le système d'équations :

$$176\ 876 = 0{,}054\ 411 \cdot a\left(1 - \frac{\epsilon^2}{4}\right) - 0{,}162\ 923 \cdot a\,\frac{\epsilon^2}{4},$$

$$92\ 778 = 0{,}028\ 313 \cdot a\left(1 - \frac{\epsilon^2}{4}\right) + 0{,}057\ 565 \cdot a\,\frac{\epsilon^2}{4}.$$

Par division membre à membre, a disparaît : il reste une équation en ϵ^2 qui donne

$$\epsilon^2 = 0{,}006\,354\,15,$$

d'où

$$\text{aplatissement} = 1 - \sqrt{1 - \epsilon^2} = 1 : 314{,}26.$$

On obtiendra a, en toises, en remplaçant ϵ^2 par sa valeur dans chacune des équations ; l'égalité des deux valeurs de a sera une vérification :

$$a = 3\,271\,514 \text{ toises}.$$

Si on effectue n mesures d'arc de méridien, on peut écrire un système de $2n$ équations, linéaires en n et $a\epsilon^2$. Ces $2n$ équations ne seront pas compatibles, à cause des erreurs inévitables d'observation, et aussi, sans doute, parce que, en réalité, le géoïde n'est pas tout à fait un ellipsoïde de révolution. Il appartient à la théorie des erreurs de déterminer les meilleures valeurs des inconnues.

Mètre. — La mesure de la méridienne de France, amorcée en 1670, revue en 1740, fut étendue de Dunkerque à Barcelone et terminée de 1792 à 1799. On en déduisit 5 130 740 toises pour le quart du méridien terrestre. Le *mètre* fut défini la dix-millionième partie de cette longueur.

Des mesures plus récentes ont établi de meilleures valeurs de la longueur du méridien ; et la valeur admise aujourd'hui subira encore des corrections. Mais la longueur du mètre n'a pas été modifiée ; sa définition géodésique n'a donc plus qu'un intérêt historique, et, aujourd'hui, le mètre doit se définir la longueur d'une barre de platine iridié, dite mètre-étalon, déposée au *Bureau international des poids et mesures,* à Sèvres (Paris).

Dans les calculs peu précis, on se rappellera néanmoins utilement que la circonférence équivalente au méridien terrestre a pour rayon à peu près

$$\frac{40\,000\,000}{2\pi} \quad \text{ou} \quad 6\,366\,000 \text{ m. environ.}$$

Remarques. — 1. Pour parer à toute éventualité, il était important d'établir la longueur du mètre en fonction de longueurs qui puissent toujours être retrouvées. Les longueurs utilisées dans ce but ont été les longueurs d'onde de rayons lumineux bien déterminés, dans des conditions physiques bien définies. Les rayons adoptés (Michelson, 1892) ont été les rayons rouge, vert et bleu émis par les vapeurs incandescentes du cadmium, se propageant dans l'air sec, à la température de 15° C. et sous une pression de $0^m,76$ de mercure :

1 m. = 1 553 164,1 longueurs d'onde du rayon rouge,
1 m. = 1 966 249,7 longueurs d'onde du rayon vert,
1 m. = 2 083 372,1 longueurs d'onde du rayon bleu ;

et, inversement,

longueur d'onde du rayon rouge = $0^m,000\,000\,643\,846\,96$,
longueur d'onde du rayon vert = $0^m,000\,000\,508\,582\,40$,
longueur d'onde du rayon bleu = $0^m,000\,000\,479\,991\,07$.

Ce n'est évidemment que du point de vue tout à fait théorique qu'on peut regretter que la reconstitution du mètre exigerait, dans l'établissement de la pression, l'emploi de la longueur à reconstituer.

2. L'enseignement élémentaire présente comme dérivées du mètre, dans le *système métrique,* les unités de mesure des surfaces, volumes, poids, capacités. Il n'y a aucune difficulté pour les unités de surface et de volume ; mais il était impossible de réaliser un corps dont le poids fût exactement (dans le vide) celui d'un décimètre cube d'eau pure à son maximum de densité. L'unité de poids ou de pression, le *kilogramme,* ne peut se définir que la pression exercée sur son support, dans le vide, par un certain corps en platine iridié, déposé au Bureau international de Sèvres ; ce poids est extrêmement voisin de celui d'un décimètre cube d'eau à 4° C. Cela étant, le litre est, par définition, le volume d'un kilogramme d'eau pure à son maximum de densité et sous

une pression de $0^m,76$ de mercure ; ce qui entraîne la quasi-identité du litre et du décimètre cube.

Résultats. — L'ellipsoïde adopté en 1820 pour la carte de France, puis en 1860 pour la carte de Belgique, a les dimensions suivantes :

$$a = 6\,376\,986 \text{ m.},$$
$$b = 6\,356\,323 \text{ m.},$$
$$\epsilon = 0{,}082\,21,$$
$$\frac{a-b}{a} = \frac{1}{308}.$$

L'ellipsoïde adopté par la *Connaissance des Temps,* à partir de son édition pour 1915, a les dimensions suivantes :

$$a = 6\,378\,388 \text{ m.},$$
$$b = 6\,356\,909 \text{ m.},$$
$$\frac{a-b}{a} = \frac{1}{297}.$$

40. LE GÉOIDE ELLIPSOIDAL NON DE RÉVOLUTION

Parmi les relations entre a et ϵ qui se déduisent de nombreuses mesures d'arcs de méridien, il y en a qui sont si éloignées d'être compatibles avec les autres que leur incompatibilité ne peut être attribuée uniquement aux erreurs d'observation. On a songé à remplacer l'hypothèse, trop simple sans doute, d'un ellipsoïde de révolution, par celle d'une surface dont la détermination introduise un plus grand nombre de paramètres.

Après un essai de surface de révolution à méridienne compliquée, on s'est arrêté à un ellipsoïde à trois axes inégaux dont le moindre soit la ligne des pôles (1) ; il y a alors quatre grandeurs

(1) L'intersection d'une pareille surface avec un plan passant par la ligne des pôles n'est plus, comme lors d'une surface de révolution, telle que la tangente en chacun de ses points soit la projection de l'axe du monde sur l'horizon de ce

à fixer : les longueurs des trois axes et la longitude du plus grand. Les résultats n'ont pas présenté d'intérêt : les divers ellipsoïdes trouvés diffèrent autant l'un de l'autre que de l'ellipsoïde de révolution, et l'inégalité des axes équatoriaux est bien près de se confondre avec les erreurs possibles d'observation.

Revenant à l'hypothèse d'un ellipsoïde de révolution, on détermine aujourd'hui son aplatissement par une tout autre méthode, dite *méthode dynamique,* et dont il ne pourra être parlé qu'ultérieurement.

41. RÉFRACTION ATMOSPHÉRIQUE

L'air atmosphérique, gaz transparent, pesant et compressible, entoure le sphéroïde terrestre ; sa densité décroît avec l'altitude en tendant vers zéro. Les rayons lumineux issus des astres traversent ainsi un milieu isotrope hétérogène : l'indice de réfraction en un point est fonction des coordonnées de ce point, et indépendant de la direction du rayon lumineux. Si on connaît cette fonction, l'application des lois de la réfraction permet d'écrire les équations différentielles du rayon passant d'un point donné A à un point donné B : dans les applications astronomiques, A est un astre, B l'œil de l'observateur ou une plaque photographique.

Si on admet, ce qui est vrai à très peu près, que l'indice de réfraction ne varie qu'avec la distance à un point C, à savoir le centre de la Terre, le rayon lumineux se maintient dans le vertical ABC : une équation différentielle suffit à son étude, et cette équation s'intègre par simple quadrature.

La *direction apparente* de l'astre A au point B est celle de la

---

point. La courbe jouissant de cette propriété est l'intersection de l'ellipsoïde avec une surface cylindrique parallèle à la ligne des pôles et dont la directrice dans le plan de l'équateur est une courbe parabolique passant par le centre et d'autant plus proche d'une droite que les deux axes équatoriaux sont moins différents.

tangente en B à la courbe lumineuse BA ; et on appelle *correction de réfraction,* ou simplement *réfraction,* l'angle de cette direction apparente et de la direction vraie (rectiligne) BA : ces deux directions ont le même azimut.

L'astre est toujours assez éloigné pour qu'on puisse considérer la direction vraie BA comme parallèle à la tangente à la courbe lumineuse au point B. Dans les cas les plus défavorables, évités dans les observations, l'erreur ainsi commise n'atteint pas 1″.

La densité, et, par suite, l'indice de réfraction, décroissant avec l'altitude, il est certain que la courbe lumineuse est sans point d'inflexion et tourne sa convexité vers le zénith de l'observateur : ainsi la hauteur apparente d'un astre est plus grande que sa hauteur vraie, et la correction de réfraction doit se retrancher des hauteurs mesurées. La réfraction est nulle si l'astre est au zénith.

L'astronomie expérimentale détermine la correction de réfraction en fonction de la distance zénithale apparente ; voici quelques résultats pour une température de 10° C. et une pression de 760 mm. au lieu d'observation :

dist. zénith. = 0°, 3°, 15°, 50°, 75°, 85°, 89°, 90° ;
réfraction = 0″, 3″, 16″, 1′9″, 3′33″, 9′47″, 24′25″, 34′54″.

Du point de vue théorique, le calcul de la réfraction, par exemple en fonction de la distance zénithale apparente, exige l'expression de l'indice de réfraction en fonction de l'altitude. Mais cette fonction est inconnue : chaque auteur d'une théorie de la réfraction a proposé une hypothèse particulière.

Pour répondre à la réalité, la fonction proposée devrait contenir au moins la température, la pression atmosphérique et l'état hygrométrique de l'air au point d'observation. Les auteurs se contentent de chercher une *réfraction moyenne* pour des conditions physiques déterminées, comme une température de 10° C. et une pression de 760 mm. (peu d'auteurs se sont préoccupés de l'état hygrométrique). Pour d'autres conditions physiques, des facteurs correctifs sont introduits.

Malgré l'importance théorique de la fonction inconnue, on démontre que l'expression de la réfraction est pratiquement la même quelle que soit cette fonction, lorsque la distance zénithale apparente est moindre que 60°.

Jusqu'à cette distance zénithale, une bonne expression de la réfraction R est donnée par la formule suivante, en fonction de la distance zénithale apparente Z,

$$(R)'' = 60'',56706 \text{ tang } Z - 0'',067018 \text{ tang}^3 Z,$$

pour les conditions physiques moyennes définies ci-dessus.

Dans des conditions physiques différentes, la réfraction est le produit de la réfraction moyenne, d'un *facteur thermométrique* et d'un *facteur barométrique*. Dans la pratique, on trouve ces trois facteurs dans des *tables* dont les arguments sont la distance zénithale apparente, la température et la pression atmosphérique.

Dans l'horizon, la réfraction a une valeur considérable ; en voici quelques conséquences.

1. Le lever apparent d'un astre précède son lever vrai ; son coucher apparent est en retard sur son coucher vrai.

2. La dépression apparente est moindre que la dépression vraie ; dans les conditions physiques moyennes, le rapport de la première à la seconde est de 92 à 100 ; dans des circonstances atmosphériques extrêmes, ce rapport peut atteindre 0,95 et descendre à 0,85. C'est la raison pour laquelle nous avons trouvé un résultat variable et trop grand dans notre tentative de mesure du rayon terrestre par l'observation de la dépression.

3. La réfraction atmosphérique relève davantage le bord inférieur que le bord supérieur des astres à diamètre sensible : d'où un *aplatissement apparent* qui devient appréciable dans le voisinage de l'horizon.

42. MAGNÉTISME TERRESTRE

Déclinaison. — On sait qu'une aiguille aimantée, mobile sur un pivot vertical, et maintenue horizontale, prend une direction sensiblement constante en un même lieu. Des deux

directions de l'axe longitudinal de l'aiguille, celle qui fait le moindre angle avec la direction cardinale nord est, par définition, la direction du *nord magnétique ;* l'autre est la direction du *sud magnétique*. Par opposition, on dit parfois *nord vrai* et *sud vrai* pour les points cardinaux.

Le *méridien magnétique* en un point est le vertical contenant l'axe longitudinal de l'aiguille en ce point.

La *déclinaison magnétique* est l'azimut de la direction nord magnétique.

La déclinaison magnétique en un lieu subit une variation, dite *variation diurne,* qui a même période que le mouvement diurne du Soleil ; pendant cette période, elle passe par deux maxima (déclinaisons occidentales extrêmes) et deux minima (déclinaisons orientales extrêmes) : dans l'hémisphère magnétique nord (voir plus loin, même numéro, *inclinaison*), les maxima correspondent à peu près aux passages du Soleil dans le méridien, et les minima aux lever et coucher de cet astre ; c'est l'inverse dans l'hémisphère magnétique sud. L'amplitude de cette variation est très variable, et comprise entre 0,1 et 0,5 grade. De plus, surtout pendant la nuit, des perturbations accidentelles (orages magnétiques) viennent briser la régularité du phénomène.

La déclinaison magnétique moyenne en un lieu, par exemple pendant une année, varie lentement avec le temps : en 274 ans (de 1514 à 1815), elle a passé, à Paris, de —7° à +22°,5.

Pendant l'année 1914, la déclinaison magnétique moyenne à Uccle a été de + 12°26′,0 ; la décroissance actuelle y est d'environ 8′ par siècle.

La déclinaison magnétique varie avec le lieu d'observation. Les *lignes isogoniques* ou *isogones* sont les courbes de la surface terrestre, lieux d'égale déclinaison moyenne ; leur direction générale est nord-sud avec une torsion vers l'orient. Deux lignes isogoniques de déclinaison nulle vont de l'Océan Arctique aux terres antarctiques ; l'une traverse actuellement la mer d'Hudson, la partie orientale du Canada et des États-Unis, les Guyanes et le Brésil ; l'autre coupe le Spitzberg, entre en Europe au Cap Nord,

passe par le Caucase, atteint l'Océan Indien au golfe Persique et traverse l'Australie occidentale. Une troisième ligne isogonique de déclinaison nulle se ferme en entourant la Chine orientale, la Corée et le Japon. Ces lignes divisent la surface terrestre en portions de déclinaisons de signes contraires : celles qui contiennent, l'une l'Afrique, l'autre le Japon ont, en tous leurs points, une déclinaison positive ; celle qui contient l'Amérique centrale a, en tous ses points, une déclinaison négative.

Les isogones se déplacent lentement, et les cartes de ces lignes ne sont bonnes que pour une époque déterminée : aussi portent-elles souvent une carte des lieux d'égale variation annuelle de la déclinaison, ce qui les rend utilisables pendant très longtemps. Les cartes marines indiquent aussi les isogones et leurs déplacements.

Compas. — L'orientation de l'axe d'un navire par rapport au méridien magnétique d'abord, et, après correction, par rapport au méridien géographique, se fait au moyen du *compas* (boussole marine).

Dans une cuvette cylindrique suspendue à la Cardan, fermée par deux glaces horizontales, et dont l'axe, vertical, est réalisé par un pivot métallique dur et effilé, oscille une aiguille aimantée ou un système d'aiguilles aimantées parallèles ; perpendiculairement au pivot, un limbe azimutal gradué est fixé sur les aiguilles, le rayon initial parallèle à celles-ci, dans leur direction nord. Le tout est porté et protégé par l'habitacle, solidaire du navire. La ligne de foi est un trait vertical tracé sur la surface cylindrique intérieure de la cuvette et marquant, vers l'avant, l'intersection de celle-ci avec un plan passant par l'axe et parallèle au plan longitudinal du navire, quand celui-ci est droit.

Si l'aiguille aimantée n'était influencée que par le magnétisme terrestre, la lecture sur le limbe en regard de la ligne de foi serait l'azimut de la quille du navire prise vers l'avant ; mais l'aiguille est encore influencée par les masses magnétiques voisines.

La *déviation* est l'angle azimutal (gaucher par rapport au zénith)

allant de la direction du nord magnétique à celle de la direction nord de l'axe de l'aiguille aimantée.

La déviation est fonction de l'azimut de la quille du navire ; de plus, pour un même azimut, elle varie lentement avec la position du navire. Un compas est dit compensé lorsqu'une disposition convenable de masses magnétiques dans son voisinage rend la déviation aussi faible que possible.

Le passage de la lecture du compas à l'azimut du plan longitudinal du navire (correction des caps) comporte un terme de déclinaison et un terme de déviation. Le passage de la lecture du compas à l'azimut de la trajectoire du navire (correction des routes) comporte, de plus, les termes dus à la dérive et au courant.

Inclinaison. — Suspendue par son centre de gravité, sans autre précaution, l'aiguille aimantée ne s'équilibre généralement pas suivant l'horizontale du méridien magnétique.

L'*inclinaison magnétique* en un lieu est la hauteur de la direction nord de l'axe de l'aiguille aimantée librement suspendue en ce lieu.

Comme la déclinaison, l'inclinaison est soumise à des variations diurne, annuelle, et à longue période, ainsi qu'à des perturbations accidentelles.

Les *isoclines* sont les courbes de la surface terrestre, lieux des points d'égale inclinaison magnétique (annuelle). L'*équateur magnétique* est l'isocline d'inclinaison nulle ; il est peu distant de l'équateur terrestre. Le *pôle magnétique nord* est le point terrestre où l'inclinaison est égale à $-90°$; le *pôle magnétique sud* est le point terrestre où l'inclinaison est égale à $+90°$; ils sont voisins des pôles terrestres de même nom. Les deux portions de la surface de la Terre séparées par l'équateur magnétique sont les deux *hémisphères magnétiques,* nord et sud comme les pôles qu'ils renferment.

On rend horizontale l'aiguille de la boussole d'inclinaison en lestant une de ses extrémités, ou en usant l'autre à la meule ; c'est en quoi consiste l'*ajustement* de l'aiguille.

43. REPRÉSENTATION DE LA SURFACE TERRESTRE

Les modes de représentation plane de la surface terrestre (et de la sphère étoilée) seront enseignés dans des *Leçons sur la Correspondance des surfaces et la Cartographie*. Nous ne donnons ici que les NOTIONS DE CARTOGRAPHIE les plus indispensables.

Surfaces correspondantes. — Considérons trois fonctions de deux variables indépendantes, u et v :

$$x = f_1(u, v),$$
$$y = f_2(u, v),$$
$$z = f_3(u, v),$$

et supposons que, pour toutes les valeurs qu'on peut être amené à donner à ces variables : 1° ces fonctions soient continues ainsi que leurs dérivées ; 2° la somme des carrés des trois déterminants fonctionnels

$$h = \begin{vmatrix} \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} \\ \frac{dz}{du} & \frac{dz}{dv} \end{vmatrix}, \quad i = \begin{vmatrix} \frac{dz}{du} & \frac{dz}{dv} \\ \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} \end{vmatrix}, \quad j = \begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} \end{vmatrix},$$

ne puisse devenir nulle ni infinie.

On sait que lorsque les paramètres u et v varient de façon que, dans le plan des uv, le point de coordonnées (u, v) se déplace à l'intérieur d'un domaine D, dont chacun des points vérifie les conditions ci-dessus, le point (x, y, z) décrit une surface dont l'équation se retrouve sous forme ordinaire par élimination de u et de v entre les trois équations proposées : u et v sont les *coordonnées curvilignes* du point correspondant de la surface.

Appelons s cette première surface, et écrivons, sous les mêmes conditions, les équations paramétriques d'une deuxième surface S :

$$X = F_1(u, v),$$
$$Y = F_2(u, v),$$
$$Z = F_3(u, v),$$

dont les trois déterminants fonctionnels sont H, I, J tels que

$$H^2 + I^2 + J^2 \text{ fini et} > 0$$

A chaque point (u, v) du plan des uv correspondent un point M (X, Y, Z) de la surface S et un point m (x, y, z) de la surface s. Il y a ainsi correspondance uniforme point par point entre ces deux surfaces.

Échelle des longueurs. — Toute relation entre u et v définit une courbe du plan des uv, et établit une correspondance entre une courbe C de la surface S et une courbe c de la surface s. Écrivons une pareille relation,

$$v = \psi(u),$$

et donnons nous une valeur u_0 de u. Cette valeur fait correspondre un point M_0 de la courbe C à un point m_0 de la courbe c. Prenons encore une valeur quelconque u de ce paramètre, et soient M et m les deux points correspondants.

Appelons L et l les arcs de C et de c limités par les points M_0 et M, m_0 et m, mesurés positivement dans le sens correspondant aux u croissants. La courbe étant donnée, L et l sont fonctions de u seul, et sont ainsi fonctions l'un de l'autre.

On appelle *échelle des longueurs de la surface* s *au point* m (u, v), *le long de la courbe* c, la dérivée de l par rapport à L :

$$\mathcal{E} = \frac{dl}{dL} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{\sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2}}.$$

Le calcul de chaque terme de cette expression est sans difficulté. En posant

$$e = \left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2,$$

$$f = \frac{dx}{du} \cdot \frac{dx}{dv} + \frac{dy}{du} \cdot \frac{dy}{dv} + \frac{dz}{du} \cdot \frac{dz}{dv},$$

$$g = \left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)^2,$$

$$\mathrm{E} = \left(\frac{d\mathrm{X}}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\mathrm{Y}}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\mathrm{Z}}{du}\right)^2,$$

$$\mathrm{F} = \frac{d\mathrm{X}}{du}\cdot\frac{d\mathrm{X}}{dv} + \frac{d\mathrm{Y}}{du}\cdot\frac{d\mathrm{Y}}{dv} + \frac{d\mathrm{Z}}{du}\cdot\frac{d\mathrm{Z}}{dv},$$

$$\mathrm{G} = \left(\frac{d\mathrm{X}}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\mathrm{Y}}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\mathrm{Z}}{dv}\right)^2,$$

$$r = \frac{dv}{du},$$

nous trouverons :

$$\mathcal{E} = \frac{\sqrt{e + 2fr + gr^2}}{\sqrt{\mathrm{E} + 2\mathrm{F}r + \mathrm{G}r^2}}.$$

Ainsi, l'échelle des longueurs n'est fonction que des coordonnées (u, v) du point où on la prend, et du coefficient angulaire r de la tangente à la courbe $v = \psi(u)$, c'est-à-dire de la direction de la tangente à la courbe le long de laquelle on la prend. — Il en résulte que, en un point, l'échelle est la même le long de toutes les courbes ayant même tangente en ce point.

Dans chacun des trinômes du second degré que renferme l'expression de $\mathcal{E}$, le coefficient du terme du second degré est positif. Pour toutes les valeurs de r, chacun d'eux passe donc par un minimum qui est $(eg - f^2)$ ou $(\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2)$. Or

$$eg - f^2 = h^2 + i^2 + j^2,$$

$$\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2 = \mathrm{H}^2 + \mathrm{I}^2 + \mathrm{J}^2,$$

quantités toujours positives par hypothèse. L'échelle des longueurs est donc une quantité toujours réelle, et qui ne peut devenir nulle ni infinie.

Scalaire. — Problème. — *On donne, par leurs équations paramétriques, deux surfaces correspondantes* S *et* s, *et un couple de coordonnées* (u, v). *On demande le lieu géométrique des points*

situés sur les tangentes menées à la surface s *par le point* m (u, v) *de cette surface, de part et d'autre de ce point, à des distances de celui-ci égales à l'échelle* $\mathcal{E}$ *correspondante.*

Appelons (ξ, η, ζ) les coordonnées d'un point quelconque de la courbe demandée, et t_x, t_y, t_z les cosinus directeurs de la tangente à laquelle il appartient :

$$\xi = x + \mathcal{E}t_x, \quad t_x = \pm \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = \pm \frac{\dfrac{dx}{du} + r\dfrac{dx}{dv}}{\sqrt{e + 2fr + gr^2}},$$

$$\eta = y + \mathcal{E}t_y, \quad t_y = \pm \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = \pm \frac{\dfrac{dy}{du} + r\dfrac{dy}{dv}}{\sqrt{e + 2fr + gr^2}},$$

$$\zeta = z + \mathcal{E}t_z, \quad t_z = \pm \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = \pm \frac{\dfrac{dz}{du} + r\dfrac{dz}{dv}}{\sqrt{e + 2fr + gr^2}},$$

d'où, en fonction de la variable r :

$$\xi = x \pm \frac{\dfrac{dx}{du} + r\dfrac{dx}{dv}}{\sqrt{\mathrm{E} + 2\mathrm{F}r + \mathrm{G}r^2}},$$

$$\eta = y \pm \frac{\dfrac{dy}{du} + r\dfrac{dy}{dv}}{\sqrt{\mathrm{E} + 2\mathrm{F}r + \mathrm{G}r^2}},$$

$$\zeta = z \pm \frac{\dfrac{dz}{du} + r\dfrac{dz}{dv}}{\sqrt{\mathrm{E} + 2\mathrm{F}r + \mathrm{G}r^2}}.$$

Ce sont les équations paramétriques de la courbe demandée. Cette courbe est plane par hypothèse. De plus, elle est du second ordre ; car l'élimination de r entre les trois équations paramétriques laisse deux équations entières et rationnelles du second degré. Enfin, ce ne peut être qu'une ellipse réelle, car l'échelle, dans aucune direction, n'est imaginaire, ni nulle, ni infinie.

Cette ellipse a pour centre le point m (x, y, z) : les points (ξ, η, ζ) correspondant aux signes supérieurs et aux signes inférieurs appartiennent à la même ellipse.

On donne à cette courbe le nom de *scalaire* ou d'*indicatrice des échelles*. Il résulte de sa nature :

1° que le maximum et le minimum de l'échelle en tout point se réalisent dans des directions perpendiculaires, celles des axes de la scalaire en ce point ;

2° qu'il y a, autour de chaque point, quatre directions, opposées deux à deux, ayant une échelle de telle valeur numérique comprise entre l'échelle maximum et l'échelle minimum, et symétriques par rapport aux directions de ces échelles extrêmes ;

3° qu'il suffit que l'échelle soit la même dans trois directions, dont aucune ne soit opposée à l'une des deux autres, pour qu'elle soit la même dans toutes les directions, et que la scalaire soit circulaire.

Amorçons le calcul des directions et des grandeurs des axes de la scalaire, directions et grandeurs des échelles extrêmes. Les valeurs de r qui les déterminent, sont les deux racines de l'équation

$$(e\mathrm{F} - \mathrm{E}f) + (e\mathrm{G} - \mathrm{E}g)\, r + (f\mathrm{G} - \mathrm{F}g)\, r^2 = 0,$$

obtenue en égalant à zéro le numérateur de $\frac{d\mathfrak{E}^2}{dr}$. Ces racines sont réelles et distinctes. Les valeurs du maximum et du minimum correspondants s'obtiennent en remplaçant, dans l'expression de $\mathfrak{E}^2$, r successivement par chacune des racines de l'équation précédente. On obtient ainsi, pour ces valeurs extrêmes, les racines positives de l'équation

$$(\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2)\, \mathfrak{E}^4 - (\mathrm{E}g + e\mathrm{G} - 2\mathrm{F}f)\, \mathfrak{E}^2 + (eg - f^2) = 0.$$

Applicabilité. — Quelles sont les conditions pour que l'échelle soit indépendante de u, de v et de r, — c'est-à-dire pour que l'échelle soit la même en tous points et dans toutes les directions, — ou, encore, pour que la scalaire soit une circonférence de

rayon constant ?

Ces conditions sont

$$\frac{e}{\mathrm{E}} = \frac{f}{\mathrm{F}} = \frac{g}{\mathrm{G}} = \text{constante},$$

et cette constante est égale au carré de l'échelle. On dit, dans ce cas, que la surface S est *applicable* sur la surface s, à l'échelle $\sqrt{\frac{e}{\mathrm{E}}}$, ou que la surface s est, à cette échelle, un *développement* de la surface S.

En particulier, une surface est développable, par définition, lorsqu'elle est applicable sur un plan, et la condition pour qu'il en soit ainsi est indépendante de l'échelle. — La sphère, l'ellipsoïde ne sont pas des surfaces applicables sur un plan.

Orthomorphisme. — La correspondance des surfaces S et s est dite *orthomorphe* ou *conforme* lorsque l'angle de deux directions tangentes quelconques issues d'un point quelconque d'une surface est égal à l'angle des deux directions tangentes correspondantes issues du point correspondant sur l'autre.

Cela étant, cherchons la condition pour que deux surfaces, connues par leur représentation paramétrique, soient en correspondance orthomorphe.

Autour des points m et M correspondants, les deux directions r', r'' du plan des uv font se correspondre les angles k et K donnés par

$$\cos k = t'_x t''_x + t'_y t''_y + t'_z t''_z$$

$$= \pm \frac{e + f(r' + r'') + gr'r''}{\sqrt{e + 2fr' + gr'^2} \cdot \sqrt{e + 2fr'' + gr''^2}},$$

$$\cos \mathrm{K} = \mathrm{T}'_x \mathrm{T}''_x + \mathrm{T}'_y \mathrm{T}''_y + \mathrm{T}'_z \mathrm{T}''_z$$

$$= \pm \frac{\mathrm{E} + \mathrm{F}(r' + r'') + \mathrm{G}r'r''}{\sqrt{\mathrm{E} + 2\mathrm{F}r' + \mathrm{G}r'^2} \cdot \sqrt{\mathrm{E} + 2\mathrm{F}r'' + \mathrm{G}r''^2}}.$$

Pour que ces angles soient égaux, il faut et il suffit que les

rapports $\frac{e}{E}$, $\frac{f}{F}$, $\frac{g}{G}$ soient des fonctions identiques de u et de v ; c'est-à-dire que l'échelle des longueurs soit, autour de chaque point, indépendante de la direction ; ou bien encore que, en tout point de la surface s, la scalaire soit une circonférence.

Échelle des aires. — Le point (u, v) du plan des uv établit la correspondance du point M de la surface S et du point m de la surface s. Lorsqu'il parcourt le rectangle infiniment petit $du\ dv$, le point M parcourt, sur la surface S, l'aire infiniment petite

$$d\Sigma = \sqrt{EG - F^2}\ du\ dv,$$

et le point m parcourt, sur la surface s, l'aire infiniment petite

$$d\sigma = \sqrt{eg - f^2}\ du\ dv. \quad (1)$$

On appelle *échelle des aires* de la surface s au point (u, v) le rapport $\frac{d\sigma}{d\Sigma}$, ou

$$\mathfrak{A} = \frac{\sqrt{eg - f^2}}{\sqrt{EG - F^2}},$$

nécessairement réel, fini et différent de zéro.

Or, nous savons que l'échelle des longueurs maximum a et l'échelle des longueurs minimum b, c'est-à-dire les demi-axes de

---

(1) Pour retrouver cette expression, posons nous le *problème* suivant : *Quelle est, sur la surface* s, *l'aire* dσ *correspondant au rectangle infiniment petit limité par les droites parallèles à l'axe des* v *et d'abscisses* u, u + du, *et par les droites parallèles à l'axe des* u *et d'ordonnées* v, v + dv ?

A ce rectangle correspond un parallélogramme infiniment petit. — Au côté du rectangle parallèle à l'axe des u ($r = 0$) correspond, dans le parallélogramme, un côté de longueur $\sqrt{e} \cdot du$. — Au côté du rectangle parallèle à l'axe de v ($1 : r = 0$) correspond un côté de longueur $\sqrt{g}\ dv$. — Aux directions perpendiculaires des côtés du rectangle correspond un angle k donné par

$$\cos k = f : \sqrt{eg}, \qquad \sin k = \sqrt{eg - f^2} : \sqrt{eg} ;$$

et l'aire du parallélogramme a pour mesure

$$d\sigma = \sqrt{e} \cdot du \times \sqrt{g} \cdot dv \times \frac{\sqrt{eg - f^2}}{\sqrt{eg}} \quad \text{ou} \quad \sqrt{eg - f^2} \cdot du\,dv.$$

la scalaire au point (u, v), sont les racines positives de l'équation

$$(EG - F^2)\,\rho^4 - (Eg + eG - 2Ff)\,\rho^2 + (eg - f^2) + 0.$$

Nous voyons ainsi que l'*échelle des aires en un point est égale au produit des demi-axes de la scalaire en ce point ;* elle est, par suite, *proportionnelle à l'aire de cette courbe.*

On dit que la surface s porte une représentation *équivalente* de la surface S lorsque l'échelle des aires est constante ; une aire prise sur la surface s et l'aire correspondante de la surface S sont alors dans un rapport constant, égal à l'échelle des aires. — Pour qu'une représentation soit équivalente, il faut et il suffit que l'aire de la scalaire soit invariable. Une représentation à la fois conforme et équivalente constitue un développement.

La Cartographie — Considérons le géoïde, sphérique ou ellipsoïdal, portant les méridiens, les parallèles, et les projections horizontales des points de la surface terrestre. La *Cartographie* est l'étude de la correspondance de cette surface (ou d'une portion de cette surface) et d'un plan. La figure plane obtenue est une *carte* du géoïde (ou d'une portion du géoïde). A chaque mode de correspondance répond donc un mode de construction de la carte.

La surface représentée n'est pas développable, et l'échelle ne peut pas être constante : la carte ne peut être à la fois conforme et équivalente.

Le *canevas* de la carte est la figure formée, sur celle-ci, par l'ensemble des courbes correspondant à un réseau de méridiens et de parallèles du géoïde. On comprend que le tracé d'un canevas suffisamment serré permet de marquer sur la carte, avec telle approximation désirée, l'image de tout point du géoïde défini par sa longitude et sa latitude.

Il suffira ici d'étudier quelques représentations cartographiques du géoïde considéré comme sphérique : pour un géoïde ellipsoïdal, les calculs s'allongeraient, sans que rien d'essentiel, dans les méthodes, doive être modifié.

Soit a le rayon du géoïde sphérique. Comme coordonnées curvilignes de ses points, adoptons la longitude λ et la latitude φ. Les équations paramétriques de la sphère sont

$$X = a \cos \lambda \cos \varphi,$$
$$Y = a \sin \lambda \cos \varphi,$$
$$Z = a \sin \varphi,$$

d'où

$$H = a^2 \cos \lambda \cos^2 \varphi, \quad I = a^2 \sin \lambda \cos^2 \varphi, \quad J = a^2 \sin \varphi \cos \varphi,$$

$$H^2 + I^2 + J^2 = a^4 \cos^2 \varphi$$

et les pôles $\left(\varphi = \pm \frac{\pi}{2}\right)$ sont, dans ce mode de représentation, des points singuliers qui ne peuvent être considérés ou doivent faire l'objet d'un examen spécial.

D'autre part

$$E = a^2 \cos^2 \varphi, \quad F = 0, \quad G = a^2.$$

Nous prendrons le plan $z = 0$ pour surface de la carte, et les équations paramétriques de cette surface se réduiront à deux fonctions quelconques de λ et φ :

$$x = f_1(\lambda, \varphi),$$
$$y = f_2(\lambda, \varphi),$$

telles que $\begin{vmatrix} \frac{dx}{d\lambda} & \frac{dx}{d\varphi} \\ \frac{dy}{d\lambda} & \frac{dy}{d\varphi} \end{vmatrix} \neq 0.$

L'équation en (x, y) de l'image d'un méridien de longitude λ résulte de l'élimination de φ entre ces équations ; de même l'élimination de λ laisse l'équation en (x, y) du parallèle de latitude φ. D'une façon générale, l'équation en (x, y) d'une courbe $\psi(\lambda, \varphi) = 0$ s'obtient par élimination de λ et de φ entre cette équation et les équations de correspondance.

Projection plate. — Voici une première application : elle doit tout son intérêt à son extrême simplicité. Le projection plate, qui exclut la représentation des pôles,

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2},$$

a pour équations paramétriques

$$x = a\mu \cos \varphi_0 (\lambda - \lambda_0),$$
$$y = a\mu (\varphi - \varphi_0),$$

d'où

$$e = a^2\mu^2 \cos^2 \varphi_0, \quad f = 0, \quad g = a^2\mu^2 ;$$

et

$$h^2 + i^2 + j^2 = eg - f^2 = a^4\mu^4 \cos^2 \varphi_0 ;$$

μ est une constante quelconque ; le point dont les coordonnées sont (λ_0, φ_0), soit sur le géoïde, soit sur la carte, est le *centre* de la projection.

Les échelles des longueurs et des aires sont, avec $r = \frac{d\varphi}{d\lambda}$,

$$\mathcal{E} = \mu \frac{\sqrt{\cos^2 \varphi_0 + r^2}}{\sqrt{\cos^2 \varphi + r^2}}, \qquad \mathcal{A} = \mu^2 \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi},$$

invariables le long d'un même parallèle ; la carte n'est ni conforme ni équivalente ; μ est l'échelle des longueurs au centre, dans toute direction.

Le canevas se compose de deux faisceaux perpendiculaires de droites parallèles : la distance de deux méridiens, de deux parallèles, est proportionnelle à la différence des longitudes, des latitudes correspondantes.

Carte conforme de Mercator. — La carte dite de Mercator est une *carte conforme à canevas rectiligne.*

Pour que la carte soit conforme :

1° F étant nul, f doit l'être aussi,

$$\frac{dx}{d\lambda}\frac{dx}{d\varphi} + \frac{dy}{d\lambda}\frac{dy}{d\varphi} = 0 ;$$

2° e et g doivent être proportionnels à E et G,

$$\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2 = \cos^2 \varphi \left\{ \left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 \right\}.$$

Cherchons à satisfaire à ces équations aux dérivées partielles en supposant que x est une fonction de λ seul, et y une fonction de φ seul. La première équation est alors identiquement satisfaite, et la deuxième se réduit à

$$\frac{dy}{d\varphi} = \pm \frac{dx}{d\lambda} \frac{1}{\cos \varphi}.$$

$\frac{dy}{d\varphi}$ étant fonction de φ seul, il faut que

$$\frac{dx}{d\lambda} = a\mu,$$

une constante, d'où, avec la constante d'intégration $a\mu\lambda_0$,

$$x = a\mu(\lambda - \lambda_0) \qquad (1)$$

et

$$dy = \pm \frac{a\mu}{\cos \varphi} d\varphi ;$$

d'où encore

$$y = a\mu \log \text{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right), \qquad (2)$$

où il s'agit d'un logarithme népérien. Telles sont, en (1) et (2), les équations de correspondance, desquelles on tire
$e = a^2\mu^2$, $f = 0$, $g = a^2\mu^2 : \cos^2 \varphi$, $eg - f^2 = a^4\mu^4 : \cos^2 \varphi$, et cette correspondance exclut la représentation des pôles.

Les images des méridiens sont des droites parallèles à l'axe des y, et cet axe correspond au méridien λ_0 ; à des méridiens équidistants correspondent des droites équidistantes.

Les images des parallèles sont des droites parallèles à l'axe des x, et cet axe correspond à l'équateur ; à des parallèles équidistants correspondent des droites d'autant plus distantes que la latitude est plus grande en valeur absolue. Lorsqu'un point terrestre se rapproche d'un pôle, son image s'éloigne indéfiniment. Le canevas est symétrique par rapport à ses axes.

Le rayon de la scalaire, circulaire en tout point, est

$$\mathcal{C} = \frac{\mu}{\cos \varphi},$$

indépendant de la longitude. Le long de l'équateur, l'échelle se réduit à son minimum, μ ; elle augmente indéfiniment quand la latitude tend vers $(\pm \pi : 2)$.

La carte de Mercator, ou carte marine, étant conforme, et les méridiens y étant figurés par des droites parallèles, représente

par des droites les *loxodromies;* celles-ci sont les courbes du géoïde coupant les méridiens sous un angle constant : ce sont à peu près des arcs de loxodromie que décrivent les navires se déplaçant de manière à maintenir invariable la lecture du compas. Sur la carte, l'équation d'une loxodromie est

$$y = mx + k,$$

et, par suite, en coordonnées curvilignes,

$$\log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = m\lambda + \frac{k}{a\mu}.$$

Carte équivalente de Flamsteed. — On convient d'appeler *échelle* d'une carte équivalente la racine carrée $\mu = \sqrt{A}$ de son échelle des aires. Ainsi, dire qu'une carte équivalente est construite à l'échelle de 1 : 20 000, c'est dire que son échelle des aires est égale à $(1 : 20\,000)^2$.

La condition d'équivalence, suivant une échelle des aires A, d'une correspondance de la sphère et du plan est

$$\left\{\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2\right\} - \left\{\frac{dx}{d\lambda}\frac{dx}{d\varphi} + \frac{dy}{d\lambda}\frac{dy}{d\varphi}\right\}^2 = a^4\mu^4\cos^2\varphi.$$

Des fonctions qui satisfont d'une manière simple à cette équation sont

$$x = a\mu\lambda\cos\varphi,$$
$$y = a\mu\varphi,$$

d'où

$$eg - f^2 = a^4\mu^4\cos^2\varphi.$$

La carte équivalente, définie par ces équations, porte le nom de *carte de Flamsteed* ou *carte sinusoïdale :* les images des pôles y sont des points singuliers.

A des parallèles équidistants correspondent des droites équidistantes, parallèles à l'axe des x, qui représente l'équateur.

Le méridien de longitude λ a pour image la sinusoïde

$$x = a\mu\lambda\cos\frac{y}{a\mu};$$

la portion de plan occupée par la carte du géoïde entier est limitée par les deux arcs de la sinusoïde

$$x = \pm \pi a\mu \cos \frac{y}{a\mu}$$

qui se rejoignent aux points $(0, \pm \pi a\mu : 2)$. — Le canevas est symétrique par rapport aux axes coordonnées.

L'échelle des longueurs au point (λ, φ), dans la direction quelconque $r = \frac{d\varphi}{d\lambda}$, se tire de

$$\frac{(\text{éch.})^2}{\mu^2} = \frac{\cos^2 \varphi - 2\lambda \sin \varphi \cos \varphi\, r + (1 + \lambda^2 \sin^2 \varphi)\, r^2}{\cos^2 \varphi + r^2}.$$

En particulier, le long de tout parallèle, elle est égale à μ, et à $\mu \sqrt{1 + \lambda^2 \sin^2 \varphi}$ le long du méridien λ.

Carte équivalente de Bonne. — Ce n'est pas par un hasard heureux qu'on a trouvé, pour satisfaire à l'équation aux dérivées partielles de l'équivalence, les fonctions qui définissent la carte de Flamsteed. Dans un enseignement détaillé de la Cartographie, on verrait comment ces fonctions résultent de conditions supplémentaires imposées à la carte équivalente, de celle, en particulier, de donner des droites pour images des parallèles du géoïde.

De même, imposons nous la condition que les parallèles du géoïde soient représentés par des circonférences concentriques : nous réaliserons la *carte de Bonne*. L'équation d'équivalence est satisfaite, avec cette condition, par les fonctions suivantes, dans lesquelles ρ représente le rayon de la circonférence qui doit figurer l'équateur :

$$x = (\rho - a\mu\varphi) \sin \frac{a\mu\lambda \cos \varphi}{\rho - a\mu\varphi},$$

$$y = (\rho - a\mu\varphi) \cos \frac{a\mu\lambda \cos \varphi}{\rho - a\mu\varphi},$$

d'où

$$eg - f^2 = a^4\mu^4 \cos^2 \varphi,$$

et les pôles sont des points singuliers de la représentation.

Nous connaissons l'allure des images des parallèles ; leur centre commun appartient à l'axe des y, et le canevas est symétrique par rapport à cet axe.

Le méridien de longitude λ a pour image une courbe dont l'équation différentielle est

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\left(\theta - \frac{a\mu\lambda\cos\varphi}{\rho - a\mu}\right)$$

où on a posé

$$\operatorname{cotang}\theta = \lambda\sin\varphi - \frac{a\mu\lambda\cos\varphi}{\rho - a\mu}.$$

L'échelle des longueurs au point (λ, φ), dans la direction r, se déduit de

$$\frac{(\text{éch.})^2}{\mu^2} = \frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi - 2\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\, r + r^2}{\cos^2\varphi + r^2};$$

elle est, en particulier, égale à μ le long de tout parallèle, et à μ coséc θ dans la direction du méridien, au point (λ, φ).

En calculant l'échelle des aires, nous trouvons, comme il était nécessaire, une constante, μ^2.

C'est ce système cartographique qui a été adopté pour la construction de la *Carte de Belgique,* minutée à l'échelle $\mu = 1 : 10\,000$, et publiée aux échelles $\mu = 1 : 20\,000$, $1 : 40\,000$, $1 : 100\,000$, $1 : 160\,000$. Mais le géoïde y a été considéré comme ellipsoïdal de révolution, avec les dimensions renseignées plus haut.

Perspectives. — Plusieurs systèmes cartographiques usuels consistent à considérer la carte comme une perspective du géoïde sphérique : cette perspective est définie par la position du point de vue et la position du plan qui porte la carte, par rapport au géoïde. L'image d'un point du géoïde est l'intersection de ce plan avec la droite déterminée par le point considéré et le point de vue.

Soient (λ, φ) les coordonnées géographiques d'un point terrestre quelconque, (X_o, Y_o, Z_o) les coordonnées rectilignes du point de vue, et (λ_o, φ_o) les coordonnées géographiques du rayon terrestre

auquel est perpendiculaire le plan qui porte la carte. En coordonnées courantes (ξ, η, ζ), l'équation de ce plan est

$$\xi \cos \lambda_o \cos \varphi_o + \eta \sin \lambda_o \cos \varphi_o + \zeta \sin \varphi_o = aC,$$

avec aC pour mesure de sa distance au centre du géoïde, positive ou négative suivant que ce plan se trouve ou non, par rapport au centre, du même côté que le point terrestre (λ_o, φ_o). La droite déterminée par le point de vue et le point terrestre (λ, φ) a pour équations

$$\frac{\xi - X_o}{a \cos \lambda \cos \varphi - X_o} = \frac{\eta - Y_o}{a \sin \lambda \cos \varphi - Y_o} = \frac{\zeta - Z_o}{a \sin \varphi - Z_o};$$

et, par conséquent, les coordonnées (ξ, η, ζ) du point cartographique (λ, φ) sont

$$\xi = X_o + [aC - (X_o \cos \lambda_o \cos \varphi_o + \cdots)] \frac{a \cos \lambda \cos \varphi - X_o}{(a \cos \lambda \cos \varphi - X_o) \cos \lambda_o \cos \varphi_o + \cdots},$$

$$\eta = Y_o + [aC - (X_o \cos \lambda_o \cos \varphi_o + \cdots)] \frac{a \sin \lambda \cos \varphi - Y_o}{(a \cos \lambda \cos \varphi - X_o) \cos \lambda_o \cos \varphi_o + \cdots},$$

$$\zeta = Z_o + [aC - (X_o \cos \lambda_o \cos \varphi_o + \cdots)] \frac{a \sin \varphi - Z_o}{(a \cos \lambda \cos \varphi - X_o) \cos \lambda_o \cos \varphi_o + \cdots}.$$

Passons de ces coordonnées de l'espace aux coordonnées (x, y) du plan de la carte. Soient (α, β, γ) les coordonnées (ξ, η, ζ) du point du plan adopté pour origine :

$$\alpha \cos \lambda_o \cos \varphi_o + \beta \sin \lambda_o \cos \varphi_o + \gamma \sin \varphi_o = aC.$$

En représentant par (X, x) le cosinus de l'angle des axes des X et des x, les équations de transformation sont

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha + x\,(X, x) + y\,(X, y), \\ \eta &= \beta + x\,(Y, x) + y\,(Y, y), \\ \zeta &= \gamma + x\,(Z, x) + y\,(Z, y), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} (X, x)^2 + (X, y)^2 + \cos^2 \lambda_o \cos^2 \varphi_o &= 1, \\ (Y, x)^2 + (Y, y)^2 + \sin^2 \lambda_o \sin^2 \varphi_o &= 1, \\ (Z, x)^2 + (Z, y)^2 + \sin^2 \varphi_o &= 1, \end{aligned}$$

$$(Y, x)(Z, x) + (Y, y)(Z, y) + \sin\lambda_0 \sin\varphi_0 \cos\varphi_0 = 0,$$
$$(Z, x)(X, x) + (Z, y)(X, y) + \cos\lambda_0 \sin\varphi_0 \cos\varphi_0 - 0,$$
$$(X, x)(Y, x) + (X, y)(Y, y) + \sin\lambda_0 \cos\lambda_0 \cos^2\varphi_0 = 0 ;$$

et, inversement,

$$x = (\xi - \alpha)(x, X) + (\eta - \beta)(x, Y) + (\zeta - \gamma)(x, Z),$$
$$y = (\xi - \alpha)(y, X) + (\eta - \beta)(y, Y) + (\zeta - \gamma)(y, Z).$$

Telles sont les équations de correspondance, où il faut considérer ξ, η, ζ comme les fonctions, calculées ci-dessus, de λ, φ.

Pour préciser, prenons comme origine, sur la carte, le point de percée du rayon terrestre (λ_0, φ_0), pied de la perpendiculaire abaissée du centre du géoïde sur la carte ; conduisons l'axe des y le long de l'image du méridien de ce point, vers l'image du pôle nord ; et complétons un système (x, y) gaucher. Dans ces conditions, nous obtenons :

$$(X, x) = \sin\lambda_0, \quad (X, y) = -\cos\lambda_0 \sin\varphi_0, \quad \alpha = aC \cos\lambda_0 \cos\varphi_0,$$
$$(Y, x) = -\cos\lambda_0, \quad (Y, y) = -\sin\lambda_0 \sin\varphi_0, \quad \beta = aC \sin\lambda_0 \cos\varphi_0,$$
$$(Z, x) = 0, \quad (Z, y) = \cos\varphi_0, \quad \gamma = aC \sin\varphi_0,$$

et, par substitution, les expressions de x, y.

Les perspectives les plus intéressantes sont celles dans lesquelles le point de vue appartient au diamètre (λ_0, φ_0), auquel le plan de la carte est perpendiculaire. Appelons alors $a\rho$ la distance de ce point de vue au centre du géoïde, positive ou négative suivant que le point de vue n'est pas ou est, par rapport au centre, du même côté que le point terrestre (λ_0, φ_0) :

$$X_0 = -a\rho \cos\lambda_0 \cos\varphi_0, \quad Y_0 = -a\rho \sin\lambda_0 \cos\varphi_0, \quad Z_0 = -a\rho \sin\varphi_0.$$

Il en résulte que

$$\frac{\xi}{a} = -\rho \cos\lambda_0 \cos\varphi_0 + (C + \rho)\frac{\cos\lambda \cos\varphi + \rho \cos\lambda_0 \cos\varphi_0}{\sin\varphi \sin\varphi_0 + \cos\varphi \cos\varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0) + \rho},$$

$$\frac{\eta}{a} = -\rho \sin\lambda_0 \cos\varphi_0 + (C + \rho)\frac{\sin\lambda \cos\varphi + \rho \sin\lambda_0 \cos\varphi_0}{\sin\varphi \sin\varphi_0 + \cos\varphi \cos\varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0) + \rho},$$

$$\frac{\zeta}{a} = -\rho \sin\varphi_0 + (C + \rho)\frac{\sin\varphi + \sin\varphi_0}{\sin\varphi \sin\varphi_0 + \cos\varphi \cos\varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0) + \rho},$$

et

$$x = -a(C+\rho)\frac{\cos\varphi \sin(\lambda-\lambda_0)}{\sin\varphi\sin\varphi_0+\cos\varphi\cos\varphi_0\cos(\lambda-\lambda_0)+\rho},$$

$$y = +a(C+\rho)\frac{\sin\varphi\cos\varphi_0-\cos\varphi\sin\varphi_0\cos(\lambda-\lambda_0)}{\sin\varphi\sin\varphi_0+\cos\varphi\cos\varphi_0\cos(\lambda-\lambda_0)+\rho}.$$

Ce mode de perspective n'est appliqué que dans les trois cas particuliers suivants :

1°) $1:\rho = 0$, ce qui équivaut à un point de vue infiniment éloigné : c'est la *projection horizontale ;*

2°) $\rho = 0$, c'est-à-dire que le point de vue est au centre du géoïde : c'est la *projection centrale ;*

3°) $\rho = 1$, c'est-à-dire que le point de vue appartient au géoïde, et est diamétralement opposé au point terrestre (λ_0, φ_0) : c'est la *projection stéréographique.*

Projection horizontale. — En introduisant l'hypothèse $1 : \rho = 0$ dans les formules générales, celles-ci deviennent :

$$x = -a\cos\varphi\sin(\lambda-\lambda_0),$$
$$y = a[\sin\varphi\cos\varphi_0 - \cos\varphi\cos\varphi_0\cos(\lambda-\lambda_0)],$$

et ces coordonnées sont indépendantes de la distance du plan de projection au centre du géoïde. Aux points de ce plan faisons correspondre les points (x', y') de la carte définitive au moyen des relations

$$x' = \mu x, \qquad y' = \mu y,$$

où μ est une constante positive quelconque. Les images des méridiens et des parallèles appartiennent à des ellipses dont on étudiera utilement les diverses particularités. La carte n'est ni conforme, ni équivalente ; à l'origine (λ_0, φ_0) de la carte, la scalaire est circulaire et de rayon μ.

Projection centrale. — La projection centrale, $\rho = 0$, est dite *polaire, méridienne* ou *horizontale* suivant que le plan qui porte la carte est perpendiculaire à l'axe terrestre, à un rayon équatorial, ou à tout autre rayon terrestre déterminé.

Dans le cas général d'une projection horizontale, $0 < |\varphi_o| < \frac{\pi}{2}$ et

$$x = - aC \frac{\cos \varphi \sin (\lambda - \lambda_o)}{\sin \varphi \sin \varphi_o + \cos \varphi \cos \varphi_o \cos (\lambda - \lambda_o)},$$

$$y = + aC \frac{\sin \varphi \cos \varphi_o - \cos \varphi \sin \varphi_o \cos (\lambda - \lambda_o)}{\sin \varphi \sin \varphi_o + \cos \varphi \cos \varphi_o \cos (\lambda - \lambda_o)}.$$

Dans le cas particulier d'une projection polaire, $\varphi_o = \pm \frac{\pi}{2}$ et

$$x = \mp aC \sin (\lambda - \lambda_o) \operatorname{cotg} \varphi,$$
$$y = - aC \cos (\lambda - \lambda_o) \operatorname{cotg} \varphi :$$

les méridiens sont reclilignes convergents, et les parallèles sont circulaires concentriques ; l'équateur est inaccessible.

Dans le cas particulier d'une projection méridienne, $\varphi_o = 0$ et

$$x = - aC \operatorname{tg} (\lambda - \lambda_o),$$
$$y = aC \operatorname{séc} (\lambda - \lambda_o) \operatorname{tg} \varphi :$$

les méridiens sont rectilignes parallèles, et les parallèles sont des branches d'hyperbole dont l'axe imaginaire est l'équateur ; les pôles sont inaccessibles.

Le calcul des échelles est un exercice utile : à l'origine (λ_o, φ_o) de la carte, la scalaire est circulaire et de rayon C.

Les cartes de cette espèce représentent les axes de grand cercle par des segments rectilignes, d'où leur utilité en navigation.

Projection stéréographique. — La projection stéréographique, $\rho = 1$, est dite *polaire, méridienne* ou *horizontale* suivant que le plan qui porte la carte est perpendiculaire à l'axe terrestre, à un rayon équatorial ou à tout autre rayon terrestre déterminé.

Dans le cas général d'une projection horizontale, $0 < |\varphi_o| < \frac{\pi}{2}$ et

$$x = - a (C + 1) \frac{\cos \varphi \sin (\lambda - \lambda_o)}{\sin \varphi \sin \varphi_o + \cos \varphi \cos \varphi_o \cos (\lambda - \lambda_o) + 1},$$

$$y = a (C + 1) \frac{\sin \varphi \cos \varphi_o - \cos \varphi \sin \varphi_o \cos (\lambda - \lambda_o)}{\sin \varphi \sin \varphi_o + \cos \varphi \cos \varphi_o \cos (\lambda - \lambda_o) + 1}.$$

Dans le cas particulier d'une projection polaire, $\varphi_o = \pm \frac{\pi}{2}$ et

$$x = -a(C+1)\frac{\cos\varphi \sin(\lambda - \lambda_o)}{1 \pm \sin\varphi},$$

$$y = -a(C+1)\frac{\cos\varphi \cos(\lambda - \lambda_o)}{1 \pm \sin\varphi};$$

les méridiens sont rectilignes convergents, et les parallèles sont circulaires concentriques ; l'équateur est une circonférence de rayon $a(C+1)$.

Dans le cas particulier d'une projection méridienne, $\varphi_o = 0$ et

$$x = -a(C+1)\frac{\cos\varphi \sin(\lambda - \lambda_o)}{1 + \cos\varphi \cos(\lambda - \lambda_o)},$$

$$y = a(C+1)\frac{\sin\varphi}{1 + \cos\varphi \cos(\lambda - \lambda_o)}.$$

De ces équations de correspondance, on tirerait l'expression de l'échelle, la description du canevas, etc. Remarquons seulement qu'à l'origine (λ_o, φ_o) de la carte, la scalaire est circulaire et de rayon $(C+1) : 2$; et attachons-nous plutôt à démontrer le théorème suivant : *A toute circonférence du géoïde correspond une circonférence de la carte.*

Nous pouvons évidemment, sans nuire à la généralité, adopter les circonstances simplificatrices de la projection méridienne.

L'équation générale d'une circonférence du géoïde est de la forme

$$p\cos(\lambda - \lambda_o)\cos\varphi + q\sin(\lambda - \lambda_o)\cos\varphi + r\sin\varphi = s,$$

qu'il faut associer aux équations de correspondance pour éliminer λ et φ. La résolution des trois équations par rapport à

$$\cos(\lambda - \lambda_o)\cos\varphi, \quad \sin(\lambda - \lambda_o)\cos\varphi, \quad \sin\varphi,$$

et la condition que la somme des carrés de ces trois quantités soit

égale à l'unité, laissent, après division par $(p + s)$, l'équation

$$(p+s)(x^2+y^2)+2a(C+1)(qx-ry)-a^2(C+1)^2(p-s)=0,$$

dans laquelle on reconnaît l'équation d'une circonférence. — Les coordonnées du centre de cette circonférence sont :

$$-\frac{a(C+1)q}{p+s}, \qquad \frac{a(C+1)r}{p+s}.$$

Or, la circonférence proposée sur le géoïde appartient au plan sécant

$$(p\cos\lambda_o - q\sin\lambda_o)\xi + (p\sin\lambda_o + q\cos\lambda_o)\eta + r\zeta = as,$$

qui est le plan polaire du point

$$\frac{a(p\cos\lambda_o - q\sin\lambda_o)}{s}, \qquad \frac{a(p\sin\lambda_o + q\cos\lambda_o)}{s}, \qquad \frac{ar}{s}.$$

La perspective de ce point sur le plan

$$\xi\cos\lambda_o + \eta\sin\lambda_o = aC,$$

qui est celui de la carte, a pour coordonnées (ξ, η, ζ) de l'espace

$$\xi = a(C+1)\frac{(p+s)\cos\lambda_o - q\sin\lambda_o}{p+s} - a\cos\lambda_o,$$

$$\eta = a(C+1)\frac{(p+s)\sin\lambda_o + q\cos\lambda_o}{p+s} - a\sin\lambda_o,$$

$$\zeta = a(C+1)\frac{r}{p+s},$$

et sur la carte

$$x = -\frac{a(C+1)q}{p+s}, \qquad y = \frac{a(C+1)r}{p+s}.$$

Ainsi, à toute circonférence du géoïde correspond une circonférence de la carte, et *le centre de celle-ci est la perspective du pôle du plan auquel appartient la circonférence du géoïde.*

44. ROTATION DE LA TERRE

En un jour sidéral, l'ensemble des étoiles effectue par rapport à la Terre, d'un mouvement uniforme, autour de la droite des pôles terrestres, une rotation complète dans le sens rétrograde pour un observateur regardant de la direction nord de l'axe terrestre. — Donc, en un jour sidéral, la Terre effectue *par rapport à l'ensemble des étoiles,* d'un mouvement uniforme, autour de la droite de ses pôles, une rotation complète *dans le sens direct* pour un observateur regardant de la direction nord de son axe.

Ces deux façons de parler sont équivalentes *du point de vue cinématique ;* l'adoption de la seconde facilite souvent l'étude des mouvements des astres autres que les étoiles.

Nous verrons ce qu'il y a à en dire *du point de vue dynamique.*

CHAPITRE II

LE SOLEIL

45. MOUVEMENT DU RAYON GÉOCENTRIQUE SOLAIRE

Zodiaque. Écliptique. — La première constatation relative au mouvement du Soleil est celle d'une certaine participation au mouvement diurne. Il se lève, en effet, comme les étoiles, en un point du demi-horizon limité par la méridienne et auquel appartient la direction est ; et il se couche aussi en un point du demi-horizon auquel appartient la direction ouest ; même, du moins en première approximation, il atteint sa plus grande hauteur, chaque jour, à l'instant de son passage au méridien.

Cependant, le Soleil n'est pas une étoile : son ascension droite et sa déclinaison varient lentement ; ses distances angulaires aux étoiles ne sont pas constantes. En effet, le lever du Soleil n'est pas toujours précédé du lever des mêmes étoiles, et son coucher n'est pas toujours suivi du coucher des mêmes étoiles. La direction du Soleil passe par une région stellaire comprise entre la région stellaire dont le coucher suit immédiatement le coucher du Soleil et la région stellaire dont le lever, le même jour, a précédé immédiatement le lever du Soleil. Or, le groupement stellaire dans lequel se projette le Soleil emprunte successivement toutes les étoiles d'une zone de la sphère étoilée à laquelle on a donné le nom de *zodiaque*. Le groupe stellaire rendu invisible par la présence du Soleil parcourt la zone zodiacale tout entière *dans le sens inverse du mouvement diurne,* et en un temps d'environ 365 ensembles d'un jour et d'une nuit consécutifs. Le mouvement du Soleil par rapport à la sphère étoilée est environ 365 fois plus lent que le mouvement diurne par rapport à la Terre.

D'une façon plus précise, mesurons l'ascension droite et la déclinaison du centre du Soleil pendant au moins 365 jours consécutifs. Dans l'ignorance de la distance de cet astre, nous ne pouvons appliquer les corrections de parallaxe, et, considérant ces coordonnées comme relatives à la direction géocentrique solaire, nous faisons rentrer les erreurs de parallaxe dans les erreurs inévitables d'observation.

A ce degré d'approximation, nous trouvons que la direction géocentrique solaire décrit, par rapport aux étoiles, environ en 365 jours et nuits, *dans le sens direct* (gaucher) pour un observateur appartenant à la direction nord de l'axe terrestre, et d'un mouvement *à peu près uniforme,* un plan dont l'*obliquité* sur le plan de l'équateur est de 23°27′. Ce plan s'appelle l'*écliptique*.

Dans la suite, l'application des corrections de parallaxe ne fera que confirmer et préciser ce résultat.

Équinoxes. Solstices. Saisons astronomiques. — L'écliptique et l'équateur, passant par le centre de la Terre, se coupent suivant la *ligne des équinoxes*. Le centre de la Terre partage la ligne des équinoxes en deux demi-droites : la demi-ligne des équinoxes en un point de laquelle le Soleil passe de l'hémisphère équatorial sud à l'hémisphère équatorial nord est l'*équinoxe de printemps* ou le *rayon vernal* (fig. 14) : la déclinaison du Soleil y devient positive, de négative qu'elle était ; — la demi-ligne des équinoxes en un point de laquelle le Soleil passe de l'hémisphère équatorial nord à l'hémisphère équatorial sud est l'*équinoxe d'automne :* la déclinaison du Soleil y devient négative, de positive qu'elle était.

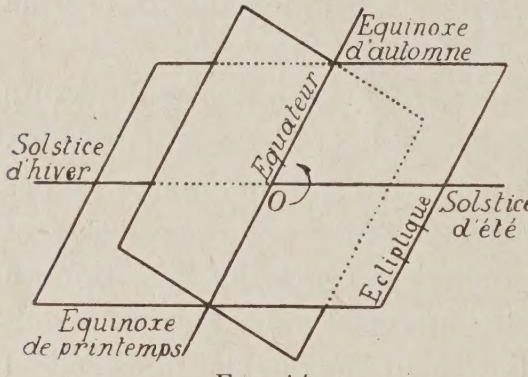

FIG. 14

La perpendiculaire à la ligne des équinoxes, menée dans l'écliptique par le centre de la Terre, est la *ligne des solstices*. La demi-ligne des solstices, issue du centre de la Terre, rencontrée dans le sens direct (gaucher), par rapport au pôle céleste nord, entre

l'équinoxe de printemps et l'équinoxe d'automne est le *solstice d'été :* c'est à l'instant de son passage au solstice d'été que le Soleil atteint une déclinaison maximum de + 23°27′ ; la demi-ligne des solstices rencontrée dans le même sens entre l'équinoxe d'automne et l'équinoxe de printemps est le *solstice d'hiver :* c'est à l'instant de son passage au solstice d'hiver que le Soleil atteint une déclinaison minimum de — 23°27′.

Les équinoxes et les solstices divisent l'écliptique en quatre quadrants. Le temps de parcours de chacun d'eux par le Soleil est une *saison astronomique ;* chaque saison porte le même nom que sa limite antérieure :

1. le *printemps,* de l'équinoxe de printemps au solstice d'été ;
2. l'*été,* du solstice d'été à l'équinoxe d'automne ;
3. l'*automne,* de l'équinoxe d'automne au solstice d'hiver ;
4. l'*hiver,* du solstice d'hiver à l'équinoxe de printemps.

La déclinaison du Soleil est positive pendant le printemps et l'été, négative pendant l'automne et l'hiver ; elle est croissante pendant l'hiver et le printemps, décroissante pendant l'été et l'automne.

Si le mouvement de la direction géocentrique solaire était uniforme, les saisons seraient d'égale durée : il n'en est pas tout à fait ainsi ; mais la durée des quatre saisons consécutives est invariable ; c'est à ce cycle de quatre saisons consécutives, commençant au passage du Soleil à l'équinoxe de printemps, qu'on donne le nom d'*année* (année tropique).

Tropiques. Cônes polaires. Zones terrestres. — L'*axe de l'écliptique* est la perpendiculaire au plan de l'écliptique, passant par le centre de la Terre ; la distance polaire nord de l'axe de l'écliptique dirigé dans l'hémisphère nord est égale à l'obliquité de ce plan sur l'équateur, ou 23°27′.

Le *tropique du Cancer* est la nappe conique de révolution autour de l'axe du monde, issue du centre de la Terre, et dont toutes les génératrices ont une déclinaison positive égale à l'obliquité de l'écliptique ; il est donc tangent à ce plan, avec le solstice d'été pour génératrice de contact.

Le *tropique du Capricorne* est la nappe conique de révolution autour de l'axe du monde, issue du centre de la Terre, et dont toutes les génératrices ont une déclinaison négative égale, en valeur absolue, à l'obliquité de l'écliptique ; il forme donc un cône avec le tropique du Cancer et est tangent à l'écliptique, avec le solstice d'hiver pour génératrice de contact.

Le *cône polaire arctique* est la nappe conique de révolution autour de l'axe du monde, issue du centre de la Terre, et dont toutes les génératrices ont une distance polaire nord égale à l'obliquité de l'écliptique ; il contient le demi-axe de l'écliptique faisant un angle aigu avec la direction nord de l'axe du monde. Le *cône polaire antarctique* est la nappe conique de révolution autour de l'axe du monde, issue du centre de la Terre, et dont toutes les génératrices ont une distance polaire sud égale à l'obliquité de l'écliptique ; il forme donc une même surface avec le cône polaire arctique et contient le demi-axe de l'écliptique faisant un angle aigu avec la direction sud de l'axe du monde.

Les cônes des verticales parallèles aux génératrices des tropiques coupent la surface de la Terre suivant des parallèles qui portent les mêmes noms ; leurs latitudes sont $+ 23°27'$ et $- 23°27'$. — Les cônes des verticales parallèles aux génératrices des cônes polaires coupent la surface terrestre suivant des parallèles dits *cercle polaire arctique* et *cercle polaire antarctique ;* leurs latitudes sont $+ (90° - 23°27')$, et $- (90° - 23°27')$.

Les tropiques et les cercles polaires divisent la surface terrestre en cinq zones :

1. la *zone glaciale arctique,* calotte contenant le pôle nord et limitée par le cercle polaire arctique ;

2. la *zone tempérée nord,* comprise entre le cercle polaire arctique et le tropique du Cancer ;

3. la *zone torride,* symétrique par rapport à l'équateur et comprise entre les tropiques ;

4. la *zone tempérée sud,* comprise entre le tropique du Capricorne et le cercle polaire antarctique ;

5. la *zone glaciale antarctique,* calotte contenant le pôle sud et limitée par le cercle polaire antarctique.

On considère souvent les projections *sur la sphère étoilée* des

éléments géocentriques qui viennent d'être définis. L'écliptique et les tropiques coupent la sphère étoilée suivant des cercles de même nom, les cônes polaires suivant les *cercles polaires* correspondants. Les équinoxes et les solstices se projettent en des points de même nom ; les points solstices sont les points de contact du grand cercle écliptique et des tropiques ; le point équinoxe de printemps s'appelle souvent *point vernal*. L'axe de l'écliptique perce la sphère aux pôles de l'écliptique, nord et sud comme les hémisphères auxquels ils appartiennent, et chacun sur un cercle polaire.

46. ORIGINE DES ASCENSIONS DROITES

C'est le rayon vernal, *la ligne des équinoxes dans le sens de l'équinoxe de printemps,* qui est adopté pour axe X du système équatorial stellaire.

Ainsi, les coordonnées stellaires du Soleil sont :
à l'équinoxe de printemps,

$$A = 0, \qquad D = 0 ;$$

au solstice d'été,

$$A = 90^\circ, \qquad D = 23^\circ 27' \text{ (maximum)} ;$$

à l'équinoxe d'automne,

$$A = 180^\circ, \qquad D = 0 ;$$

au solstice d'hiver,

$$A = 270^\circ, \qquad D = -\,23^\circ 27' \text{ (minimum)}.$$

47. DÉTERMINATION DE L'ÉCLIPTIQUE

Maintenant que nous connaissons l'existence de l'écliptique, proposons-nous de déterminer exactement la position de ce plan.

Dans ce but, faisons choix d'une étoile, dont nous adoptions le méridien pour *origine provisoire* des ascensions droites.

A n instants quelconques, répartis dans une suite de 365 jours

et nuits, mesurons l'ascension droite locale et la déclinaison locale du centre du Soleil, et nous devons considérer ces coordonnées locales comme étant aussi bien les coordonnées géocentriques du centre du Soleil aux mêmes instants : ceci fait rentrer les erreurs de parallaxe dans les erreurs d'observation. En réalité, on connaît, par d'autres recherches (que nous signalerons), la distance du Soleil ; on applique les corrections de parallaxe ; et on en déduit, en chacun des n instants d'observation, les coordonnées stellaires géocentriques du centre du Soleil :

$$A_i,\ D_i\ (i = 1, 2, \ldots n).$$

Par hypothèse, ces coordonnées vérifient une équation de la forme

$$a \sin A + b \cos A + \operatorname{tg} D = 0,$$

qui est l'équation générale d'un plan.

On peut donc écrire le système

$$a \sin A_i + b \cos A_i + \operatorname{tg} D_i = 0$$

de n équations linéaires à deux inconnues a et b. Ce système, traité par l'une des méthodes de la théorie des erreurs, fournira les valeurs les plus avantageuses de ces inconnues.

On sait comment en déduire les coordonnées polaires de la perpendiculaire à l'écliptique :

$$\operatorname{tg} A_0 = \frac{b}{a}, \qquad \operatorname{cotg} D_0 = \pm \sqrt{a^2 + b^2}.$$

L'écliptique est ainsi déterminée. On préfère souvent la connaître par l'ascension droite (provisoire) de son intersection avec l'équateur, et son obliquité sur ce plan : l'ascension droite (provisoire) de l'équinoxe de printemps diffère de 90° de l'une des deux valeurs de A_0 ; et l'obliquité est le complément de la valeur D_0 moindre que 90°.

Dans la pratique, les astronomes procèdent différemment : ils cherchent séparément ces deux éléments.

1. *Obliquité de l'écliptique.* — Au solstice d'été, la déclinaison géocentrique du Soleil est égale à l'obliquité cherchée ϵ :

$$D_1 = \epsilon ;$$

au solstice d'hiver, la même coordonnée

$$D_2 = - \epsilon ;$$

d'où, par soustraction,

$$\epsilon = \frac{D_1 - D_2}{2}.$$

La déclinaison du Soleil variant très lentement dans le voisinage des solstices, D_1 et D_2 ont pu se mesurer avec une fort grande précision. De plus, toute erreur constante commise dans la mesure des déclinaisons disparaît de la différence $(D_1 - D_2)$.

2. *Rayon vernal.* — Avec les notations précédentes, l'écliptique a pour équation

$$\text{tg } D_0 \text{ tg } D + \cos (A_0 - A) = 0$$

ou

$$\text{cotg } \epsilon \text{ tg } D + \cos (A_0 - A) = 0.$$

Quelques bonnes mesures des coordonnées stellaires du Soleil permettent d'écrire autant d'équations en A_0, différant de 90° de l'ascension droite (provisoire) du point vernal. Les époques des équinoxes sont les plus favorables à ces observations.

48. COORDONNÉES ÉCLIPTIQUES

Axes coordonnés. — Le centre de la Terre étant pris pour origine O, les axes du système des coordonnées écliptiques se définissent comme suit :

1° L'axe Z est l'*axe de l'écliptique dirigé dans l'hémisphère équatorial nord ;* le plan XY est donc l'*écliptique.*

2° L'axe X est la *ligne des équinoxes dans le sens de l'équinoxe de printemps.*

3° Le système est *direct* (gaucher) ; l'axe Y est donc dirigé comme le solstice d'été.

Coordonnées polaires. — 1° L'angle de position s'appelle ici la *longitude céleste.*

2° L'angle de pente s'appelle ici la *latitude céleste.*

Coordonnées écliptiques du Soleil. — La latitude céleste du Soleil est toujours nulle. La longitude du Soleil s'accroît de 90° au cours de chaque saison : nulle à l'équinoxe de printemps, elle est égale à 90° au solstice d'été, à 180° à l'équinoxe d'automne, à 270° au solstice d'hiver.

Coordonnées écliptiques et coordonnées stellaires. — Cherchons les formules de transformation des coordonnées rectilignes écliptiques $(x_\epsilon, y_\epsilon, z_\epsilon)$ et stellaires (x_s, y_s, z_s). Soit ϵ l'obliquité de l'écliptique sur l'équateur, environ 23°27′.

Les axes X_ϵ, X_s des deux systèmes sont communs ; les axes $Y_\epsilon Z_\epsilon$ ont subi une rotation d'amplitude ϵ par rapport aux axes $Y_s Z_s$; donc

$$x_s = x_\epsilon,$$
$$y_s = y_\epsilon \cos\epsilon - z_\epsilon \sin\epsilon,$$
$$z_s = y_\epsilon \sin\epsilon + z_\epsilon \cos\epsilon ;$$

et, inversement,

$$x_\epsilon = x_s,$$
$$y_\epsilon = y_s \cos\epsilon + z_s \sin\epsilon,$$
$$z_\epsilon = - y_s \sin\epsilon + z_s \cos\epsilon.$$

Quant aux formules de transformation des coordonnées polaires écliptiques $(\alpha_\epsilon, \delta_\epsilon)$ en coordonnées polaires stellaires (α_s, δ_s), ce sont, par suite :

$$\cos\alpha_s \cos\delta_s = \cos\alpha_\epsilon \cos\delta_\epsilon,$$
$$\sin\alpha_s \cos\delta_s = \sin\alpha_\epsilon \cos\delta_\epsilon \cos\epsilon + \sin\delta_\epsilon \sin\epsilon,$$
$$\sin\delta_s = \sin\alpha_\epsilon \cos\delta_\epsilon \sin\epsilon + \sin\delta_\epsilon \cos\epsilon.$$

49. CORRESPONDANCE DES SYSTÈMES DE COORDONNÉES

Système type	Coordonnées horizontales	Coordonnées équatoriales horaires	Coordonnées équatoriales stellaires	Coordonnées équatoriales terrestres	Coordonnées écliptiques
axe Z	direction zénithale de la verticale	direction nord de l'axe du monde			direction nord de la perpend. à l'écliptique
plan XY	horizon apparent	équateur céleste		équateur terrestre	écliptique
axe X	direction nord de la méridienne	trace équatoriale du mérid. sup.	équinoxe de printemps	trace équat. du méridien de Greenwich	équinoxe de printemps
sens	rétrograde	rétrograde	direct	rétrograde	direct
Angle de position	azimut	ang. horaire	ascension dr.	longitude	long. céleste
Angle de pente	hauteur	déclinaison	déclinaison	latitude	latit. céleste

50. TRAJECTOIRE DU SOLEIL DANS L'ÉCLIPTIQUE

Forme de l'orbite solaire. — Le diamètre apparent d'un astre, pour un observateur situé en A, est l'ouverture du cône de sommet A et circonscrit à l'astre. Si l'astre est sphérique, cet angle α est fonction de son rayon R et de la distance ρ de son centre au point A ; car

$$R = \rho \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Faisons en l'application aux observations du Soleil. La mesure, à un instant quelconque, du diamètre apparent α de cet astre, d'un point de la surface terrestre, montre que l'angle α, voisin de 30', est une petite fraction du radian, telle que, dans le développement en série de $\sin\frac{\alpha}{2}$, les termes de degré supérieur au premier sont négligeables ; il reste donc :

$$R = \rho\frac{\alpha}{2}, \qquad \text{ou} \qquad \rho = \frac{2R}{\alpha}.$$

De plus, dans notre ignorance de la valeur de ρ, nous ne pouvons calculer les corrections de parallaxe : supposons cependant α mesuré du centre de la Terre, faisant ainsi rentrer les erreurs de parallaxe dans les erreurs d'observation.

A cette approximation, la dernière égalité exprime que la distance du centre de la Terre au centre du Soleil est inversement proportionnelle au diamètre apparent de celui-ci.

Des observations du diamètre apparent du Soleil suffisamment rapprochées permettent donc de tracer une *courbe semblable* à la trajectoire du Soleil dans le plan de l'écliptique, et orientée de la même manière. On acquiert ainsi les renseignements suivants sur la nature de cette courbe et sur sa position dans l'écliptique (fig. 15).

1. La courbe décrite par le Soleil, en une année (tropique), dans le sens direct (gaucher) pour la direction nord de l'axe de l'écliptique, est une *ellipse ;* l'excentricité de cette ellipse est très faible, 1/60 environ (plus exactement 0,0167498, au 1er janvier 1900 ; cette excentricité est exagérée sur la figure, où elle vaut 0,4).

2. Le centre de la Terre (O) occupe un des foyers de cette ellipse ; son grand axe, dit *ligne des apsides,* est incliné d'environ 11°30' sur la ligne des solstices ($\sigma\sigma'$), dans le sens gaucher, de façon que la direction géocentrique du second foyer a une longitude céleste de $90° + 11°30' = 101°30'$.

Les deux extrémités de la ligne des apsides sont l'*apogée* et le *périgée*. L'apogée (A) est le point de plus grande distance du Soleil à la Terre ; le Soleil s'y trouve une dizaine de jours et nuits

après son passage au solstice d'été (σ) ; sa longitude céleste est celle du second foyer. Le périgée (P) est le point de moindre distance du Soleil à la Terre ; le Soleil s'y trouve une dizaine de jours et nuits après son passage au solstice d'hiver (σ') ; sa longitude céleste est de $270° + 11°30' = 281°30'$; nous noterons cet angle G_0.

Notons aussi e l'excentricité de l'ellipse solaire, a son demi-grand axe encore inconnu, et écrivons l'équation polaire de

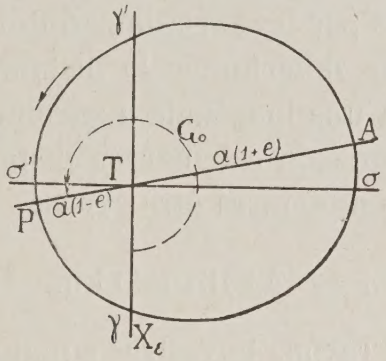

FIG. 15.

l'ellipse solaire par rapport aux axes écliptiques X_ε, Y_ε. En notant les coordonnées courantes ρ (rayon vecteur) et G (longitude céleste), cette équation est

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos(G - G_0)}.$$

On sait que le produit $a(1 - e^2)$ est le *paramètre* de l'ellipse : c'est la distance du Soleil à la Terre lorsque la direction géocentrique solaire est perpendiculaire à la ligne des apsides ($G = G_0 + \pi : 2$, ou $G_0 + 3\pi : 2$).

Le demi-grand axe a s'appelle souvent la *distance moyenne* du Soleil ; cette distance se réalise pour une longitude G telle que

$$\frac{1 - e^2}{1 + e\cos(G - G_0)} = 1$$

ou

$$\cos(G - G_0) = -e,$$

c'est-à-dire, comme on le sait, aux extrémités du petit axe de l'ellipse.

51. DISTANCE ET GRANDEUR DU SOLEIL

Distance du Soleil. — De l'équation polaire écliptique de la trajectoire solaire, on tire

$$a = \rho \frac{1 + e \cos (G - G_0)}{1 - e^2}.$$

e et G_0 étant connus par les variations du diamètre apparent, il suffit, en principe, de déterminer la distance géocentrique du Soleil correspondant à une longitude quelconque connue G de cet astre, pour être à même de calculer sa distance moyenne a. La façon de déterminer ρ ne pourra être exposée qu'ultérieurement. Elle fournit

$$a = 149\,161\,000 \text{ km.}$$

ou environ $23{,}4 \times 10^3$ rayons terrestres équatoriaux.

Parallaxe solaire. — On donne le nom de *parallaxe solaire*, pour la distance ρ, au rapport

$$p = \frac{R}{\rho},$$

R étant le rayon équatorial terrestre. C'est, à très peu près, en radian, la demi-ouverture du cône dont le sommet est au centre du Soleil et circonscrit à la Terre supposée sphérique et de rayon R ; exactement, cette demi-ouverture serait arc sin $\frac{R}{\rho}$.

En fonction de la longitude G du Soleil,

$$p = \frac{R}{a} \cdot \frac{1 + e \cos (G - G_0)}{1 - e^2};$$

elle varie de $\frac{R}{a} \cdot \frac{1}{1 - e}$, au périgée (maximum), à $\frac{R}{a} \cdot \frac{1}{1 + e}$, à l'apogée (minimum).

La connaissance de p à un instant donné équivaut à la connaissance de ρ à cet instant : p se lit dans les recueils astronomiques annuels pour des instants suffisamment rapprochés.

En particulier, la parallaxe solaire à la distance moyenne a est égale à

$$p = \frac{R}{a} = 8'',81.$$

Approximation. — La parallaxe solaire est un élément astronomique essentiel. Elle se détermine par plusieurs méthodes entièrement différentes, et que nous signalerons au fur et à mesure que nous en aurons l'occasion. Chaque mesure l'évalue avec deux ou trois décimales ; mais la comparaison des résultats montre qu'il n'y a que la première décimale dont on soit tout à fait sûr. La deuxième décimale doit être 1 ou 2, et plus probablement 1. De cette approximation de la parallaxe, il résulte qu'on ne connaît guère la distance moyenne du Soleil qu'à 100 000 km. près.

Grandeur du Soleil. — Le rayon solaire se déduit de la distance et de la grandeur apparente du Soleil à une même époque. On obtient un rayon de 700 000 km., soit 109 rayons terrestres équatoriaux. A ces nombres correspond un volume du Soleil égal à 1 300 000 fois celui de la Terre.

52. MOUVEMENT DU SOLEIL EN LONGITUDE

Loi des aires. — Le déplacement de la direction géocentrique solaire n'est pas uniforme : cherchons la loi de ce déplacement.

Nous sommes actuellement à même de tracer un diagramme en portant le temps t en abscisse, et, en ordonnée, la longitude géocentrique G du Soleil à cet instant : le peu de précision de la méthode permet encore de faire rentrer les erreurs de parallaxe dans les erreurs d'observation.

En menant des tangentes suffisamment nombreuses à la courbe obtenue, nous pouvons déduire de ce diagramme un autre diagramme avec le temps en abscisse et avec la vitesse $\frac{dG}{dt}$ de la direction géocentrique du Soleil en ordonnée.

Sur ce second diagramme, nous constatons que la vitesse angu-

laire $\frac{dG}{dt}$ passe par un maximum $\left(\frac{dG}{dt}\right)_p$ lorsque le Soleil est au périgée, par un minimum $\left(\frac{dG}{dt}\right)_a$ lorsque le Soleil est à l'apogée, et que le rapport de ces valeurs extrêmes est à peu près égal à

$$\frac{61^2}{59^2} \text{ ou } \frac{(1+e)^2}{(1-e)^2};$$

elles sont donc de la forme

$$\left(\frac{dG}{dt}\right)_p = K(1+e)^2,$$

$$\left(\frac{dG}{dt}\right)_a = K(1-e)^2.$$

La vitesse angulaire $\frac{dG}{dt}$ prenant respectivement ces valeurs pour $G = G_0$ et $G = G_0 + \pi$, pourrait, en fonction de G, être de la forme

$$\frac{dG}{dt} = K[1 + e\cos(G - G_0)]^2.$$

La confrontation de cette formule avec le diagramme montre qu'elle est effectivement acceptable. Cherchons en une interprétation cinématique.

Appelons t_0 et t les instants où le Soleil occupe deux positions quelconques M_0 et M respectivement, puis Σ l'aire limitée par les rayons géocentriques de ces positions et l'arc d'ellipse M_0M : Σ est une fonction de t. La *vitesse aréolaire* à l'instant t est, par définition, la dérivée $\frac{dS}{dt}$; elle est liée à la vitesse angulaire par

$$\frac{d\Sigma}{dt} = \frac{1}{2}\rho^2\frac{dG}{dt}.$$

Écrivons ce second membre en fonction de G au moyen de l'équation polaire de l'ellipse et de l'expression qui vient d'être adoptée pour $\frac{dG}{dt}$. Toutes réductions faites,

$$\frac{d\Sigma}{dt} = \frac{K!}{2}a^2(1-e^2)^2 = \text{une constante C :}$$

la vitesse aréolaire du Soleil est constante.

Après intégration,

$$\Sigma = C\,(t - t_0) :$$

les aires, intérieures à l'ellipse, balayées par le rayon géocentrique du Soleil, sont proportionnelles au temps. C'est en quoi consiste la *loi des aires.*

La constante C est le rapport de tout secteur focal elliptique au temps que met à le balayer le rayon géocentrique du Soleil. Calculons C en considérant la durée S pendant laquelle la longitude du Soleil augmente de 360° ; l'aire correspondante est l'aire totale de l'ellipse, et

$$C = \frac{\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{S},$$

d'où

$$K = \frac{2C}{a^2 (1 - e^2)^2} = \frac{2\pi}{S} \cdot \frac{1}{(1 - e^2)^{3/2}}.$$

Le facteur $\frac{2\pi}{S}$ serait l'angle décrit pendant l'unité de temps par le rayon vecteur du Soleil, si le mouvement de celui-ci était uniforme ; on l'appelle le *moyen mouvement, n* :

$$n = \frac{2\pi}{S}, \qquad K = \frac{n}{(1 - e^2)^{3/2}};$$

en fonction du moyen mouvement, des éléments de l'orbite et de la longitude du Soleil, la vitesse angulaire de la direction de cet astre, et les extrema de cette vitesse sont donc

$$\frac{dG}{dt} = \frac{n}{(1 - e^2)^{3/2}} [1 + e \cos (G - G_0)]^2,$$

$$\left(\frac{dG}{dt}\right)_p = n \frac{\sqrt{1 + e}}{(1 - e)^{3/2}},$$

$$\left(\frac{dG}{dt}\right)_a = n \frac{\sqrt{1 - e}}{(1 + e)^{3/2}}.$$

Instant défini par une coordonnée écliptique du Soleil. — PROBLÈME. — *On donne le moyen mouvement* n, *les éléments* (a, e) *de l'orbite solaire, la longitude* G_0 *du périgée, l'instant* t_0 *du*

passage en ce point, et soit une longitude quelconque G, *soit un rayon vecteur* ρ *du Soleil, quelconque pourvu que non extérieur à l'intervalle* [a (1 — e), a (1 + e)].

On demande : 1° *l'instant* t *où la longitude du Soleil est égale à* G ; 2° *l'instant* t *où le rayon vecteur de cet astre est égal à* ρ.

1° Nous connaissons l'équation différentielle qui lie le temps *t* à la longitude G ; elle peut s'écrire, après séparation des variables,

$$\frac{n}{(1-e^2)^{3/2}}\,dt = \frac{dG}{[1+e\cos(G-G_0)]^2}.$$

La solution du problème actuel consiste dans l'intégration de cette équation. L'intégration du second membre se fait sans difficulté, par la méthode générale, en prenant comme nouvelle variable

$$z = \operatorname{tg}\frac{G-G_0}{2},$$

qui rendra rationnelle la fonction à intégrer. C'est ce que nous allons faire, mais en prévenant de ce que les astronomes abrègent les calculs par un artifice que nous verrons tantôt.

La substitution ci-dessus fournit

$$dG = \frac{2dz}{1+z^2}, \qquad \cos(G-G_0) = \frac{1-z^2}{1+z^2}.$$

Le second membre de l'équation différentielle devient

$$\frac{2}{(1-e)^2}\cdot\frac{1+z^2}{\left[z^2+\dfrac{1+e}{1-e}\right]^2}\,dz.$$

Posons encore, pour simplifier les écritures,

$$\epsilon^2 = -\frac{1+e}{1-e}.$$

La fonction à intégrer est $\dfrac{1+z^2}{(z^2-\epsilon^2)^2}$. Les racines du dénominateur sont deux fois $+\epsilon$ et deux fois $-\epsilon$, imaginaires. La fonction

à intégrer se décompose en une somme de fractions ayant pour dénominateurs $(z-\epsilon)$, $(z-\epsilon)^2$, $(z+\epsilon)$, $(z+\epsilon)^2$:

$$\frac{1+z^2}{(z^2-\epsilon^2)^2}=\frac{\epsilon^2-1}{4\epsilon^3}\left(\frac{1}{z-\epsilon}-\frac{1}{z+\epsilon}\right)+\frac{\epsilon^2+1}{4\epsilon^2}\left[\frac{1}{(z-\epsilon)^2}+\frac{1}{(z+\epsilon)^2}\right],$$

ou

$$\frac{\epsilon^2-1}{2\epsilon^2}\cdot\frac{1}{z^2-\epsilon^2}+\frac{\epsilon^2+1}{4\epsilon^2}\left[\frac{1}{(z-\epsilon)^2}+\frac{1}{(z+\epsilon)^2}\right],$$

c'est-à-dire, revenant à e,

$$\frac{1}{1+e}\cdot\frac{1}{z^2+\frac{1+e}{1-e}}+\frac{e}{2(1+e)}\left[\frac{1}{\left(z-\sqrt{-\frac{1+e}{1-e}}\right)^2}+\frac{1}{\left(z+\sqrt{-\frac{1+e}{1-e}}\right)^2}\right].$$

En intégrant,

$$\int\frac{1+z^2}{\left(z^2+\frac{1+e}{1-e}\right)^2}dz=\frac{1}{1+e}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{arc\,tg}\left(z\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\right)$$

$$-\frac{e}{1+e}\frac{z}{z^2+\frac{1+e}{1-e}}+\text{c}^{\text{te}}.$$

Revenant à la variable G,

$$\int\frac{dG}{[1+e\cos(G-G_0)]^2}=\frac{2}{(1-e)^2}\frac{1}{1+e}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{G-G_0}{2}\right)$$

$$-\frac{e}{1-e^2}\frac{\sin(G-G_0)}{1+e\cos(G-G_0)}+\frac{2}{(1-e)^2}\cdot\text{const.}$$

L'équation finie cherchée entre t et G est donc, après simplifications, multiplication par $\sqrt{1-e^2}$, et détermination de la constante d'intégration à l'instant $t=t_0$ où $G=G_0$:

$$n(t-t_0)=2\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{G-G_0}{2}\right)-e\sqrt{1-e^2}\,\frac{\sin(G-G_0)}{1+e\cos(G-G_0)}.$$

Telle est l'équation qui, donnant t en fonction de G, résout la

première partie du problème proposé. On remarque que cette relation est indépendante de a.

Dans un grand nombre d'applications, on pourra profiter de la petitesse de e pour remplacer le second membre par les premiers termes de son développement en série suivant les puissances de e. Si, par exemple, nous négligeons déjà le terme en e^2,

$$n(t - t_0) = G - G_0 - 2e \sin (G - G_0).$$

2° Si, au lieu de G, on se donnait ρ, on se ramènerait au cas précédent au moyen de l'équation polaire de la trajectoire solaire,

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos (G - G_0)},$$

d'où

$$\cos (G - G_0) = \frac{1}{e}\left[\frac{a(1 - e^2)}{\rho} - 1\right],$$

sans qu'il puisse y avoir, pratiquement, d'ambiguïté.

La condition de possibilité est

$$-e \leqslant \frac{a(1 - e^2)}{\rho} - 1 \leqslant +e$$

ou

$$a(1 - e) \leqslant \rho \leqslant a(1 + e),$$

telle qu'elle a été assurée dans l'énoncé du problème.

L'élimination explicite de $(G - G_0)$ ne présente aucun intérêt.

Anomalie excentrique. — A la manière qui vient d'être exposée d'intégrer l'équation

$$\frac{n}{(1 - e^2)^{3/2}}\, dt = \frac{dG}{[1 + e \cos (G - G_0)]^2},$$

les astronomes ont préféré l'artifice qui consiste dans la substitution définie par

$$\operatorname{tg} \frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \operatorname{tg} \frac{G - G_0}{2}.$$

On en tire, en vue de l'intégration,

$$dG = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\frac{1-e}{1-e\cos u}\,du,$$

$$\cos(G - G_0) = \frac{\cos u - e}{1 - e\cos u},$$

$$1 + \cos(G - G_0) = \frac{1 - e^2}{1 - e\cos u}.$$

Après substitution, on obtient simplement

$$ndt = du - e\cos u\,du$$

et, par intégration,

$$nt = u - e\sin u + \text{const.}$$

Appliquée à l'instant $t = t_0$, pour lequel $G = G_0$ et, par conséquent, $u = 0$, cette équation fournit la valeur nt_0 de sa constante d'intégration ; d'où, finalement,

$$n(t - t_0) = u - e\sin u.$$

L'élimination de u au profit de $(G - G_0)$ fait retrouver l'équation trouvée dans le problème précédent. Dans les applications numériques, on ne fait pas cette élimination : connaissant $(G - G_0)$, on en déduit u au moyen de l'équation qui définit cette variable, puis le temps t par l'équation qui vient d'être obtenue.

Quant au rayon vecteur ρ, lié à $(G - G_0)$ par l'équation que l'on sait, il est lié à u par

$$\rho = a(1 - e\cos u).$$

Si on connaît ρ, on tire de cette équation

$$\cos u = \frac{1}{e}\left(1 - \frac{\rho}{a}\right),$$

d'où u, et enfin t par l'équation en u et t.

La nouvelle variable u revient souvent dans les recherches astronomiques, et il est intéressant de lui chercher une *signification géométrique*. Actuellement, elle n'est encore définie qu'à 90°

près ; imposons lui la condition d'appartenir au même quadrant que (G — G_0).

Dessinons l'ellipse (a, e) et son cercle principal (fig. 16). Soient O leur centre, T le foyer occupé par le centre de la Terre, P le périgée, M la position du centre du Soleil à l'instant t, et M′ le

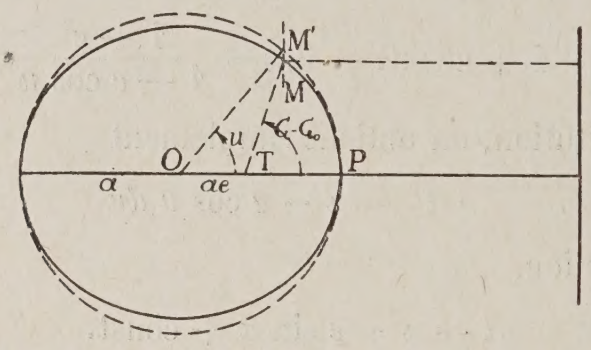

FIG. 16.

point du cercle principal qui lui correspond le long d'une même normale au grand axe. L'angle (G — G_0) est l'angle PTM. Je dis que u mesure l'angle POM′.

En effet, traçons la directrice répondant au foyer T. L'excentricité e est le rapport du rayon vecteur ρ = TM à la distance du point M à la directrice :

$$e = \frac{\rho}{\frac{a}{e} - a \cos \mathrm{POM'}};$$

d'où

$$\rho = a\,(1 - e \cos \mathrm{POM'}).$$

Il suffit de comparer avec l'expression de ρ en fonction de u,

$$\rho = a\,(1 - e \cos u),$$

pour voir que l'angle POM′ est bien égal à u.

On donne à l'angle u le nom d'*anomalie excentrique ;* d'autre part, (G — G_0) est l'*anomalie vraie ;* enfin, $n\,(t - t_0)$, angle qui serait décrit à l'instant t, à partir du périgée, par une direction solaire en mouvement uniforme, s'appelle l'*anomalie moyenne.*

Coordonnées du Soleil à un instant donné. — PROBLÈME. — *On donne le moyen mouvement* n, *les éléments* (a, e) *de l'orbite solaire, la longitude* G_0 *du périgée, l'instant* t_0 *du passage en ce point, et un instant quelconque* t.

On demande la longitude G *et le rayon vecteur* ρ *du Soleil à l'instant* t.

En principe, la relation obtenue au problème précédent entre G et *t*,

$$n(t - t_0) = 2 \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{G - G_0}{2}\right) - e\sqrt{1-e^2}\,\frac{\sin(G - G_0)}{1 + e\cos(G - G_0)},$$

et l'équation polaire de l'ellipse solaire,

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos(G - G_0)},$$

résolvent le problème actuel. Mais la première de ces équations est transcendante en G, et cette inconnue ne pourra s'en tirer que par approximations successives.

Nous sommes en présence d'une équation de la forme

$$y = f(x, e)$$

où *e* est une quantité petite, et d'où il faut tirer *x* en fonction de *y*. Admettons que la racine (simple) *x* soit susceptible d'un développement procédant suivant les puissances de *e*. Soient x_p ($p = 0, 1, 2 \ldots i$) les valeurs approchées successives déjà obtenues pour *x*, et dont chacune est un polynôme en *e* de degré *p*. L'approximation suivante consiste dans la recherche d'un polynôme en *e* de degré $(i + 1)$:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta_i x,$$

de sorte que $\Delta_i x$ est le terme cherché en e^{i+1}. Le développement en série du second membre de

$$y = f(x_i + \Delta_i x, e)$$

suivant les puissances croissantes de $\Delta_i x$ et de *e* est, sous la forme symbolique habituelle, un polynôme tel que

$$\begin{cases} y = f(x_i, 0) + \sum \frac{1}{p!}\left(\Delta_i x\,\frac{d}{dx} + e\,\frac{d}{de}\right)^p f(x_i, 0), \\ p = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

L'approximation actuelle permet d'arrêter ce développement au terme $p = i + 1$, et d'y supprimer tous les termes en $\Delta_i x$ sauf celui dans lequel $\Delta_i x$ est au premier degré et qui ne renferme pas e en facteur ; le polynôme se réduit ainsi à

$$\begin{cases} y = f(x_i, 0) + \sum \dfrac{e^p}{p!} \dfrac{d^p f(x_i, 0)}{de^p} + \Delta_i x \dfrac{df(x_i, 0)}{dx}, \\ p = 1, 2, 3, \ldots (i + 1). \end{cases}$$

L'approximation actuelle autorise encore à remplacer, dans chaque terme de rang p de la somme Σ, x_i par son développement limité au terme de e^{i-p+1}, et à remplacer, dans le terme en $\Delta_i x$, x_i par la valeur x_o indépendante de e ; ceci permet d'écrire, aussi bien,

$$\begin{cases} y = f(x_i, 0) + \sum \dfrac{e^p}{p!} \dfrac{d^p f(x_{i-p+1}, 0)}{de^p} + \Delta_i x \dfrac{df(x_o, 0)}{dx}, \\ p = 1, 2, 3, \ldots (i + 1). \end{cases}$$

C'est de cette équation qu'on tirera la valeur de $\Delta_i x$.

Dans le cas actuel où $x = G - G_0$, $y = n(t - t_o)$, les premières valeurs successives de $(G - G_0)$ sont ainsi :

$x_0 \ldots G - G_0 = n(t - t_o)$

$x_1 \ldots G - G_0 = n(t - t_o) + 2e \sin n(t - t_o)$

$x_2 \ldots G - G_0 = n(t - t_o) + 2e \sin n(t - t_o) + \dfrac{5}{4} e^2 \sin 2n(t - t_o).$

D'autre part, si nous suivons les astronomes dans l'emploi de l'anomalie excentrique, les équations

$$n(t - t_o) = u - e \sin u,$$

$$\operatorname{tg} \frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \operatorname{tg} \frac{G - G_0}{2},$$

$$\rho = a(1 - e \cos u)$$

résolvent, en principe, le problème actuel, car la première donne u en fonction de t, les deux autres G et ρ en fonction de u.

Mais la première équation est transcendante en u, et sa racine, qui est unique pour

$$0 \leqslant n(t - t_0) \leqslant 2\pi,$$

doit se chercher par approximations successives. On pourra, dans ce but, appliquer les formules établies ci-dessus pour la résolution d'une équation de la forme $y = f(x, e)$. L'équation à traiter ici est, plus particulièrement, de la forme

$$y = x - e\varphi(x),$$

et, dans ce cas,

$$\Delta_i x = y - x_i + e\varphi(x_i).$$

Ici, où $\varphi(x) = \sin x$, $x = u$, $y = n(t - t_0)$,

$$u = n(t - t_0) + e \sin n(t - t_0)$$

$$+ \frac{e^2}{2} \sin 2n(t - t_0)$$

$$+ \frac{e^3}{6} [2 \sin 3n(t - t_0) - \sin^3 n(t - t_0)] + \ldots.$$

On pourra aussi, sans utiliser la petitesse de e, passer d'une valeur approchée u_i à une valeur plus approchée u_{i+1} par un commencement de développement en $(u_{i+1} - u_i)$:

$$u_{i+1} = u_i + \frac{n(t - t_0) - u_i + e \sin u_i}{1 - e \cos u_i}.$$

Pour amorcer ce calcul, on pourrait admettre

$$u_0 = n(t - t_0),$$

comme il serait vrai dans une orbite circulaire. Mais il est préférable d'obtenir d'emblée une première valeur beaucoup meilleure par une *résolution graphique* de l'équation, ou par l'emploi d'un *nomogramme à points alignés*.

Pour préparer la solution graphique, mettons l'équation sous la forme

$$\sin u = \frac{u - n(t - t_0)}{e};$$

dans un plan rapporté à des axes (u, y) dessinons les lignes qui ont pour équations

$$y = \sin u,$$

$$y = \frac{u - n(t - t_0)}{e},$$

à savoir une sinusoïde et la droite coupant l'axe des u au point $[n(t - t_0), 0]$, et sous l'angle dont la tangente est $\frac{1}{e}$. La racine u cherchée est l'abscisse du point d'intersection (qui est unique) de ces deux lignes. — Dans l'équation, sin u a été isolé dans un

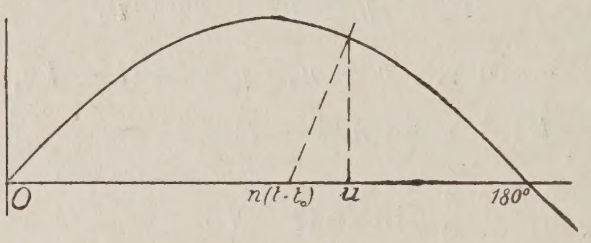

FIG. 17.

membre pour que la même sinusoïde puisse servir à l'étude d'astres pour lesquels la valeur de e serait différente de celle qui est propre à l'orbite solaire. C'est pour la même raison que le nomogramme de l'équation en u renferme utilement une échelle des e. Voici une disposition avantageuse de ce nomogramme :

Équations de l'échelle des $n(t - t_0)$, rectiligne et régulière,

$$x = 0, \quad y = \mu_1 . n(t - t_0) ;$$

équations de l'échelle des e, rectiligne et régulière, parallèle à la précédente, à une distance a,

$$x = a, \quad y = \mu_2 . e ;$$

par conséquent, équations de l'échelle des u,

$$x = \frac{a\mu_1 \sin u}{\mu_1 \sin u + \mu_2}, \qquad y = \frac{\mu_1 \mu_2 u}{\mu_1 \sin u + \mu_2}. \quad (1)$$

(1) Un artifice facile à retrouver permet le repli sur elles-mêmes des échelles des $n(t - t_0)$ et des u à partir de la valeur π de leurs paramètres, pour laquelle elles ont un point commun.

53. MOUVEMENT DU SOLEIL EN ASCENSION DROITE ET EN DÉCLINAISON

PROBLÈME. — *On donne la durée* T *de l'année (année tropique), l'excentricité* e *de l'orbite solaire, l'instant* t_0 *du passage du Soleil au périgée, la longitude* G_0 *de ce point, et l'obliquité* ϵ *de l'écliptique.*

On demande l'ascension droite A *et la déclinaison* D *du Soleil à l'instant* t.

Nous savons calculer la longitude G du Soleil à cet instant. Il suffit donc d'écrire les formules qui donnent les coordonnées stellaires (A, D) d'un astre dont les coordonnées écliptiques sont G et L (L = 0).

Les coordonnées rectilignes écliptiques sont

$$x_\epsilon = \rho \cos G,$$
$$y_\epsilon = \rho \sin G,$$
$$z_\epsilon = 0 ;$$

ses coordonnées rectilignes stellaires sont donc

$$x_s = \rho \cos G,$$
$$y_s = \rho \sin G \cos \epsilon,$$
$$z_s = \rho \sin G \sin \epsilon ;$$

d'où les équations :

$$\cos G = \cos A \cos D,$$
$$\sin G \cos \epsilon = \sin A \cos D,$$
$$\sin G \sin \epsilon = D.$$

On en déduit

$$\sin D = \sin G \sin \epsilon,$$
$$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} G \cos \epsilon,$$

l'angle A appartenant au même quadrant que l'angle G.

Dans la pratique, il suffit de consulter des *éphémérides du Soleil* et d'effectuer une interpolation, pour être dispensé des longs calculs qu'exigerait la résolution complète du problème actuel.

Contentons nous d'amorcer ces calculs en supposant l'orbite circulaire :

$$\sin D = \sin \left[G_0 + \frac{2\pi}{T} (t - t_0) \right] \sin \epsilon,$$

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} \left[G_0 + \frac{2\pi}{T} (t - t_0) \right] \cos \epsilon.$$

Si on commence à compter les temps t à l'équinoxe de printemps, $G = 0$, $G_0 = \frac{2\pi}{T} t_0$, et on a simplement:

$$\sin D = \sin \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \sin \epsilon,$$

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \cos \epsilon.$$

54. VARIATIONS DE L'ORBITE SOLAIRE

L'étude de l'orbite solaire, poursuivie pendant très longtemps, décèle une faible déformation et un lent déplacement de cette courbe.

1. *Déformation.* — L'excentricité diminue de 0,00004 par année (tropique) ; il en résulte, pendant cette période, un glissement de 60 km. du centre de l'ellipse vers le centre de la Terre. La mécanique céleste fait prévoir que cette diminution s'arrêtera à une époque très lointaine, pour faire place à une augmentation.

2. *Déplacement.* — La longitude du périgée, qui était égale à 281°33'1",7 le 1er janvier 1920, croît de 61",7 par année (tropique) ; et l'ellipse solaire effectue, par rapport à l'équinoxe, une lente révolution dans le sens direct (gaucher).

55. DESCRIPTION PHYSIQUE DU SOLEIL. ROTATION

L'éclat éblouissant du Soleil astreint l'observateur à des précautions spéciales : emploi de verres colorés ou d'un oculaire polariseur ; la photographie est d'une application avantageuse.

La surface du Soleil présente un aspect chagriné, « en peau d'orange » ; on y distingue des points brillants, les *grains de riz,* que séparent des sillons plus sombres relativement étroits.

Sur la surface solaire apparaissent fréquemment des *taches* sombres, de formes et de dimensions variables. La partie centrale, la plus sombre, d'une tache, son *noyau,* est entourée d'une *pénombre* à laquelle des filaments brillants donnent une apparence rayonnée, et, souvent, un regain d'éclat sur le bord même du noyau. La zone de pénombre est auréolée de plages éclatantes, les *facules,* nettement plus lumineuses que ne l'est moyennement la surface du Soleil. Des facules s'observent souvent ailleurs que dans le voisinage des taches, mais c'est au sein d'un anneau de facules que toute tache naît, évolue et disparaît.

Des taches persistent pendant des semaines, parfois des mois ; on peut alors étudier à loisir leur déplacement sur le disque apparent du Soleil. Elles y sont animées d'un mouvement d'ensemble, mouvement de rotation du Soleil autour d'un axe dont la position se déduit de ces observations.

A leur arrivée dans le voisinage du bord du disque solaire, les taches manifestent un effet de perspective qui s'interprète généralement comme dû à une dépression de la surface solaire en chaque tache, et dont le noyau marquerait le fond, tandis que la pénombre correspondrait aux flancs de cette sorte de cratère ; les facules, au contraire, seraient des parties surélevées de la surface, comme si les matières écartées par la dépression s'y étaient amoncelées.

Le mouvement de rotation du Soleil, décelé par l'observation prolongée des taches, s'effectue autour d'un axe qui, dirigé de

manière que cette rotation soit directe, a pour coordonnées écliptiques

$$G = 345^\circ, \qquad L = 83^\circ 3'.$$

On donne le nom d'équateur solaire au plan passant par le centre de l'astre et perpendiculaire à l'axe de rotation. La latitude solaire d'un point est l'angle que fait son rayon héliocentrique avec le plan de l'équateur, positive ou négative suivant que cette direction fait un angle aigu ou obtus avec l'axe de rotation dirigé comme il vient d'être dit.

Les taches solaires ne se forment pas à toutes les latitudes ; la latitude d'une tache est généralement comprise, en valeur absolue, entre 8 et 35°.

L'activité solaire à une époque est mesurée par le nombre et la grandeur des taches à cette époque. L'activité solaire manifeste une période d'un peu moins de onze années : trois ans d'augmentation, deux ans de faibles variations, et six ans de décroissance. La latitude moyenne des taches de chaque hémisphère équatorial est soumise à la même périodicité : au minimum de l'activité solaire, la latitude moyenne des taches est considérable, comme 30° ; elle diminue au cours de la période de manière à passer par 16° environ à l'époque du maximum pour atteindre 10° vers la fin de la période, et, un peu avant que celle-ci soit terminée, pour remonter brusquement aux latitudes élevées.

Déduite de l'observation des taches, la durée de la rotation du Soleil varie avec la latitude de chacune d'elles. La durée d'une rotation complète, par rapport aux étoiles, des zones voisines de l'équateur est 25, 23 fois la durée constante d'un jour et d'une nuit consécutifs, ce qui correspond, pendant ce temps, à un déplacement angulaire de 862′. Ce mouvement angulaire diminue avec la latitude φ, et satisfait assez bien à la formule

$$862' - 186' \sin^2 \varphi,$$

valable seulement entre les parallèles solaires qui limitent les zones où se forment les taches.

L'activité solaire est liée à l'intensité des manifestations du

magnétisme terrestre : la mesure de l'activité solaire et, en particulier, la déclinaison magnétique moyenne, pendant une durée convenable à laquelle appartient l'époque considérée, sont fonctions l'une de l'autre. De plus, les divers accidents de l'activité solaire peuvent faire varier brusquement la déclinaison de l'aiguille aimantée d'un degré de part et d'autre de sa valeur moyenne : ce sont les orages magnétiques ; à Uccle, en 1914,

déclinaison magnétique maximum, 13°3′,
déclinaison magnétique minimum, 12°26′.

Le passage de la Lune devant le Soleil par rapport à certains points terrestres soustrait parfois l'observateur à la lumière diffuse solaire. Nous étudierons ce phénomène sous le nom d'*éclipse totale du Soleil*. A l'instant où l'écran lunaire est sur le point de recouvrir le disque solaire, et à l'instant où le disque solaire commence à se dégager de l'écran lunaire, l'observateur aperçoit la surface du Soleil enveloppée d'une couche incandescente, la *chromosphère*, dont l'épaisseur varie du 1/50 au 1/100 du rayon de l'astre, et d'où s'élancent les *protubérances*, sortes de flammes dont la hauteur atteint une fraction appréciable du rayon solaire, de l'ordre, souvent, du quart de celui-ci. Pendant la durée de l'éclipse l'observateur aperçoit aussi comme une atmosphère solaire extrêmement étendue, d'autant plus étendue que l'activité de l'astre est plus voisine d'un maximum, et qui paraît constituée d'un fouillis de rayons à peu près rectilignes émanés de la surface du Soleil : c'est la *couronne*, avec les *rayons coronaux*. Mais la totalité d'une éclipse ne dure que quelques minutes, et c'est à la spectroscopie qu'il faut avoir recours pour l'étude efficace de ces phénomènes.

56. SPECTROSCOPIE SOLAIRE

Spectroscopie. — On sait en quoi consiste la *dispersion* de la lumière : un rayon lumineux simple, c'est-à-dire dont la réfraction ne modifie que la direction, est, par son passage à travers un prisme donné, dévié de sa direction primitive, d'un angle qui

dépend de sa couleur ; en d'autres termes, l'indice de réfraction d'une radiation lumineuse varie avec la longueur d'onde de cette radiation. Si un rayon lumineux est la superposition de plusieurs radiations simples, celles-ci vont suivre, au sortir du prisme, des chemins différents. L'intersection du faisceau coloré ainsi créé et d'un écran constitue un *spectre*. Le *spectroscope* provoque et observe cette dispersion.

La lumière émise par un solide ou un liquide incandescent renferme des radiations de toutes les longueurs d'onde appartenant à un intervalle déterminé, et son spectre coloré est *continu*. Il en est de même du spectre des flammes, éclairantes par l'incandescence des particules solides qu'elles contiennent.

La lumière émise par un gaz incandescent renferme un nombre limité de radiations simples, et son spectre coloré est discontinu, constitué de *raies brillantes* distinctes. Les longueurs d'onde de ces diverses radiations simples, et, par conséquent, la distribution de ces raies brillantes le long d'un spectre continu de repère, sont caractéristiques de la nature du gaz incandescent. On connaît, par exemple, les raies jaunes de la vapeur de sodium, la raie violette de la vapeur de potassium, les raies rouge, verte et bleue de la vapeur de cadmium, etc.

Ces spectres, continu et discontinu, sont des *spectres d'émission*. Mais si la lumière émise par une source incandescente traverse, avant son arrivée au spectroscope, un gaz non lumineux, elle y perd les radiations que ce gaz émettrait s'il était incandescent ; un spectre qui aurait dû être continu porte donc, dans ces circonstances, des *raies noires* correspondant aux diverses longueurs d'onde des radiations qu'émettrait le gaz absorbant si sa température était suffisante à le rendre lumineux. Un pareil spectre à raies noires est un *spectre d'absorption*.

De même, il y a encore spectre d'absorption si la lumière traverse un gaz lumineux mais dont la température est moindre que celle de la source. Là où le gaz absorbant ferait, par lui-même, naître des raies brillantes, il obscurcit le spectre, et l'éclat de ces raies moins brillantes est celui qui correspond à sa propre température.

Au contraire, si un gaz faisant partie du milieu absorbant rayonne sa lumière avec une intensité plus grande que celle des radiations correspondantes de la source, c'est en traits brillants que les raies de son spectre se détachent sur le spectre général : c'est en quoi consiste le *renversement* de ces raies dans le spectre d'absorption.

Spectroscope intégrant. — La façon la plus simple d'appliquer la spectroscopie à l'étude du Soleil est de recueillir dans le spectroscope la lumière venant à la fois de tous les points de l'hémisphère éclairant : l'instrument qui s'y prête est le *spectroscope intégrant*. On obtient ainsi un spectre continu dont les radiations correspondent aux longueurs d'onde λ comprises entre les limites 3900, 7600 (en 10^{-4} μ ou 10^{-7} mm.), et qui impressionnent l'œil en donnant la sensation de couleurs, de chacune à la suivante desquelles il y a passage progressif, du violet au rouge, avec, dans l'intervalle, l'indigo, le bleu, le vert, le jaune et l'orangé.

En dehors de ce spectre s'étalent, de part et d'autre, des radiations auxquelles l'œil est insensible. Celles qui s'étendent au delà du violet, du côté des moindres longueurs d'onde, portent une grande partie de l'énergie chimique de la lumière, et sont décelées par la photographie ; elles constituent la partie *ultra-violette* du spectre solaire, connue jusqu'à une longueur d'onde de 3000×10^{-7} mm. environ.

D'autre part, les radiations qui s'étendent en deçà du rouge, du côté des plus grandes longueurs d'onde, portent une grande partie de l'énergie calorifique de la lumière, et sont décelées par le thermomètre extrêmement sensible que constitue la pile thermo-électrique ou le bolomètre ; elles forment la partie *infra-rouge* du spectre solaire, connue jusqu'à une longueur d'onde de 9500×10^{-7} mm.

Une observation plus attentive fait découvrir une très grande quantité de raies froides, obscures et chimiquement inactives dans les trois régions du spectre solaire. La partie visible du spectre seule en fait apercevoir aujourd'hui 20 000 environ.

Or la plupart de ces raies ont pu être identifiées : on sait quel

est l'élément dont chacune d'elles révèle la présence à l'état gazeux dans un milieu absorbant, solaire ou terrestre, que traversent les rayons lumineux en passant de la surface incandescente du Soleil au spectroscope. Voici les longueurs d'onde (en 10^{-7} mm.), l'emplacement dans le spectre coloré, et l'élément correspondant de chacune des huit raies principales de la région visible, désignées par des lettres, comme il a été fait dès leur découverte, et rangées dans le sens rouge-violet :

raie A, $\lambda = 7594$, rouge, oxygène ;
B, 6867, rouge, oxygène ;
C, 6563, orangé, hydrogène ;
D_1, 5896, jaune, sodium ;
D_2, 5890, jaune, sodium ;
E, 5270, vert, fer ;
F, 4861, bleu, hydrogène ;
G, 4308, indigo, fer ;
H, 3969, violet, calcium ;
K, 3934, violet, calcium.

Avant qu'il y ait quelque intérêt à insister sur les éléments dont la présence se manifeste par les raies du spectre d'absorption, il importe de distinguer celles qui sont dues à l'atmosphère solaire de celles qui sont dues à l'atmosphère terrestre, et auxquelles on donne le nom de *raies telluriques*.

Les raies telluriques se distinguent des raies solaires en ce qu'elles sont d'autant moins prononcées que l'altitude de l'observateur est plus grande, et que le Soleil est plus élevé au-dessus de l'horizon. On les reconnaît aussi à ce qu'on les retrouve invariablement dans le spectre des autres sources, célestes et terrestres. Dans la partie rouge du spectre visible, entre les raies A et B de l'oxygène, un groupe de raies fines est dû à la vapeur d'eau : elles augmentent d'intensité en même temps que l'état hygrométrique. Il en est de même d'un groupe voisin des raies D du sodium, la *bande de la pluie*. — Les raies A et B du spectre visible sont dues à l'oxygène de l'air. — Enfin, dans la même région du spectre, des bandes sont dues à l'ozone et à l'acide carbonique.

L'absorption atmosphérique terrestre raccourcit le spectre ultra-violet : celui ci est d'autant plus étendu que le rayon lumineux traverse une moindre épaisseur d'atmosphère ; l'ozone paraît être le principal agent de cette absorption. La vapeur d'eau, l'ozone et l'acide carbonique enlèvent de larges bandes de la partie infra-rouge du spectre.

Les raies telluriques éliminées, on constate l'existence, dans l'atmosphère solaire, de la plupart des éléments. On a identifié plus de 2000 raies dues au fer seul. Les raies du calcium, du titane, de l'hydrogène sont aussi très nombreuses. Parmi les éléments terrestres importants, les seuls qui ne se retrouvent pas dans l'atmosphère solaire sont l'antimoine, l'arsenic, le bismuth, l'or, le mercure, le phosphore et le soufre. La présence du platine et de l'azote est douteuse. Le carbone semble exister partiellement en combinaison avec l'hydrogène, sous forme de cyanogène. Une raie de la partie jaune du spectre, que l'on ne pouvait identifier, a été attribuée à un élément auquel on a donné le nom d'hélium, et qui a été retrouvé longtemps après dans un minerai d'uranium, la clévéite.

Spectroscope analyseur. — Par opposition au spectroscope intégrant, le *spectroscope analyseur* ne reçoit que les rayons émanés d'une partie déterminée du disque solaire ; ces rayons sont isolés par une ouverture ménagée dans un écran sur lequel on reçoit une image du Soleil.

Le spectre des taches présente un renforcement de la raie de l'hélium et des raies du vanadium, et porte des groupes nouveaux de raies fines que l'on attribue au titane. — Le spectre des facules révèle le renversement des raies du calcium, avec un dédoublement provoqué par une mince ligne noire qui coupe la raie brillante. — Dans le spectre de la chromosphère, la ligne de l'hélium est renversée, très brillante, et dédoublée ; et les lignes du calcium se retrouvent jusqu'aux limites supérieures de la chromosphère, là d'où l'hydrogène a disparu. — Les protubérances donnent quelques raies d'hydrogène, brillantes et voisines, se détachant sur un faible spectre continu qui indique la présence de particules incandescentes.

On donne le nom de *couche renversante* à la base de la chromosphère, sur une épaisseur d'environ 1/1000 du rayon solaire. L'émission l'y emporte sur l'absorption, et les vapeurs y sont à une température maximum : on y découvre principalement le fer, le titane et le chrome.

Le spectre de la couronne est continu, avec une double raie brillante dans le vert. Cette raie n'est pas identifiée, et on appelle *coronium* l'élément inconnu auquel on l'attribue. On soupçonne aussi l'existence de raies coronales d'hélium, d'hydrogène, de calcium.

Spectrographe. — Si on fait tomber sur la *fente étroite* d'un spectroscope analyseur la lumière émise par une mince bande découpée sur l'image d'une protubérance, le spectre de cette lumière presque monochromatique se compose de quelques fines raies brillantes très rapprochées, et la longueur de ces raies est proportionnelle à la longueur de la partie de l'image lumineuse découpée par la fente.

Supposons que l'on applique cette observation à l'une de ces protubérances dites *quiescentes* (et non *éruptives*) qui ne se déforment que lentement, et qu'on l'applique successivement à des bandes contiguës de la protubérance. Si on marque chaque fois de traits les extrémités de la mince image spectrale, le rapprochement de ces figures donnera une image de la protubérance étudiée.

Qu'on admette maintenant dans la fente convenablement *élargie* du spectroscope la lumière provenant de la protubérance tout entière : le spectre continu dû à la lumière diffuse du Soleil va s'étaler et pâlir, tandis que le spectre étroit dû à chacun des points de la protubérance va rester condensé en quelques lignes brillantes, et se détacher sur le fond pâle du spectre continu. On recueillera ainsi une image globale de la protubérance quiescente ou éruptive. On imagine sans peine l'application de la photographie à chacun de ces deux procédés. En particulier, dans le procédé de la fente fine, un mouvement convenable sera donné à la fente et à la plaque, de façon que l'image totale de la protubérance s'enregistre automatiquement.

Les *spectrogrammes* des taches ne présentent pas moins d'intérêt. La pénombre des taches est le siège de violents mouvements tourbillonnaires dont on aperçoit les lignes de courant incurvées en spirale vers le noyau.

Mais, moyennant l'isolement d'une raie de longueur d'onde déterminée, ce procédé d'observation s'applique à la photographie de l'ensemble des points d'une mince bande du disque solaire, et qui rayonnent une radiation propre à tel élément.

Enfin, dans le *spectrohéliographe,* la fente et la plaque sont en mouvement de manière à enregistrer les images de l'ensemble des points de tout le disque, qui rayonnent la radiation choisie. C'est ainsi qu'on recueille, par exemple, un *spectrohéliogramme* de telle raie du calcium, image de l'ensemble des points solaires qui, à l'époque de l'observation, rayonnent la radiation correspondant à cette raie.

Mouvement de la source. — De ce que la vitesse du son n'est pas infinie, il résulte que les pas d'un passant qui s'éloigne semblent se succéder plus lentement qu'ils le font, et que plus rapidement semblent se succéder les pas d'un passant qui s'approche. Pour la même raison, et par le passage du bruit discontinu des pas à un son continu dont les vibrations sont indiscernables, le son d'une source sonore en mouvement semble élevé ou abaissé de ton suivant que la source s'approche ou s'éloigne, et ceci d'autant plus que la vitesse radiale est plus grande. Ces remarques ont ici pour objet de rappeler, par l'analogie des impressions sonores et des impressions lumineuses, qu'une raie de telle longueur d'onde se déplace par rapport au spectre de repère si la source est en mouvement, vers l'extrémité de l'ultra-violet ou vers l'extrémité de l'infra-rouge suivant que la source se rapproche ou s'éloigne, et ceci d'autant plus que la vitesse radiale de la source est plus grande. Inversement, la mesure de ce décalage permet le calcul de la vitesse radiale de la source.

L'application de ce principe à l'examen des bords du Soleil au moyen du spectroscope analyseur fournit la mesure de la vitesse de rotation de la couche renversante en ses différentes latitudes.

On retrouve la loi de rotation révélée par l'observation des taches, du moins pour les vapeurs des métaux peu volatils comme le fer, et étendue ainsi au delà des latitudes où se forment les taches. Au contraire, la vitesse angulaire de rotation de l'hydrogène des facules est indépendante de la latitude.

C'est en application du même principe que les mouvements violents dont les taches sont le siège, principalement sur le bord extérieur de la pénombre, se manifestent par une torsion des raies correspondantes, observées au spectroscope analyseur.

Enfin, on comprend comment ce principe fournit un moyen nouveau de distinguer les raies telluriques, insensibles à la rotation du Soleil.

Température du Soleil. — La concentration des rayons solaires au moyen d'une lentille assez forte peut provoquer la fusion des corps les plus réfractaires ; la température du Soleil est donc sûrement supérieure à 2000°.

Pour préciser davantage, on utilise les mesures de la quantité de chaleur envoyée par le Soleil à la Terre ; mais cette utilisation exige quelques définitions. On appelle *corps noir* celui dont la surface absorberait entièrement toutes les radiations qu'elle recevrait : tel est, pratiquement, le noir de fumée. On convient de considérer la surface solaire comme jouissant de cette propriété ; et on appelle *température effective* du Soleil celle que cette convention permettra de lui attribuer.

D'autre part, on donne le nom de *constante solaire* au nombre de calories que le Soleil envoie sur la Terre, par minute et par centimètre carré de surface normale à ses rayons. La température effective du Soleil est donc celle que devrait avoir un corps noir pour envoyer à la distance Soleil-Terre une quantité de chaleur correspondant à la constante solaire.

Le passage de la constante solaire à la température effective se fait au moyen de la loi suivante : *la température absolue* T *d'un corps noir est proportionnelle à la racine quatrième de la quantité totale d'énergie* R *que le corps émet par unité de temps :*

$$T = k\sqrt[4]{R}.$$

Le coefficient k a été déterminé expérimentalement ; en unités C. G. S., il est tel que $1 : k^4$ est égal au produit de $5{,}32.10^{-5}$ ergs par la surface du corps rayonnant.

Or des calorimètres spéciaux ont été inventés, sous le nom d'*actinomètres,* pour la mesure de la constante solaire. Celle-ci, corrigée de l'absorption terrestre, est voisine de trois calories, ce qui équivaut à un flux d'énergie de $0{,}21.10^7$ ergs par seconde et par unité de surface. R est donc égal au produit

$$R = 4\pi \,.\, 0{,}21.10^7 \,.\, a^2$$

de cette quantité d'énergie par la surface de la sphère qui aurait pour rayon la distance a du Soleil à la Terre. Ainsi, si ρ est le rayon du Soleil,

$$T = \frac{10^{5/4}}{\sqrt[4]{4\pi \,.\, 5{,}32 \,.\, \rho^2}} \sqrt[4]{4\pi \,.\, 0{,}21.10^7 \,.\, a^2} = 10^3 \sqrt{\frac{a}{5}} \sqrt[4]{\frac{21}{532}} = 6500^\circ \text{ (abs.)}.$$

La température de la surface solaire est donc voisine de 6000°.

L'étude de la lumière *dispersée* permet une autre évaluation de la température de la source. Le bolomètre, en effet, détermine le point du spectre où la température est la plus élevée, et, par conséquent, abstraction faite de l'énergie chimique ou électrique, *la longueur d'onde* λ_0 *qui correspond au maximum d'énergie.* Or, *la température absolue d'un corps noir est en raison inverse de cette longueur d'onde* λ_0, et le coefficient de proportionnalité a été déterminé expérimentalement.

Dans le spectre solaire, et abstraction faite de l'absorption atmosphérique terrestre (et solaire), on a trouvé, dans la région vert-bleu, λ_0 voisin de 5000×10^{-7} mm. L'application de ce nombre à la loi qui vient d'être énoncée donne une température solaire de 6000 à 7000°.

Entretien de l'énergie solaire. — La dépense d'énergie solaire est formidable : d'après la valeur de la constante solaire, et l'hypothèse d'une chaleur spécifique voisine de l'unité, la température du Soleil devrait, non entretenue, baisser d'au moins 1°,5 par an. L'entretien de l'énergie solaire est donc manifeste.

Le problème consiste dans la recherche de l'origine de cette énergie constamment dépensée par le Soleil, sans qu'on puisse dire qu'elle soit due à une combustion, car celle-ci n'aurait donné au Soleil qu'une durée de quelques milliers d'années.

Pour résoudre ce problème, on a avancé l'hypothèse de l'énergie entretenue par la chute continue sur le Soleil de matériaux disséminés dans l'espace; mais l'application de nombres vraisemblables à cette hypothèse ne permet l'explication que d'une petite fraction de l'énergie rayonnée par le Soleil.

L'hypothèse la plus satisfaisante semble celle d'une régénération d'énergie due à la *contraction* du Soleil. On démontre qu'il suffirait d'une réduction diamétrale de 70 m. par an, évidemment inobservable, et qui exigerait un million d'années avant que le Soleil eût perdu 5 % de son diamètre.

Pression à la surface du Soleil. — Des travaux récents ont établi une relation entre la pression qui règne dans la source lumineuse, la longueur d'onde d'une raie et sa déviation vers l'extrémité rouge du spectre. L'application de ces résultats au spectre solaire fait attribuer une pression d'environ cinq atmosphères à la couche renversante.

Phénomènes magnétiques. — Lorsque la source lumineuse appartient à un champ magnétique suffisamment intense, les raies lumineuses de son spectre présentent le phénomène du *dédoublement,* de part et d'autre de l'emplacement normal de la raie unique. Les deux composantes de ce *doublet* sont polarisées circulairement, dans des sens opposés.

Or, le spectre des taches solaires présente des dédoublements de raies, et les composantes de chaque doublet sont polarisées circulairement dans des sens opposés. Les taches du Soleil sont donc les sièges d'un champ magnétique. Ce champ magnétique est bien, dans chacune des taches, celui que produirait le tourbillon révélé par les spectrogrammes s'il était constitué de torrents de charges électriques négatives.

57. JOURS ET NUITS

Par rapport à un observateur terrestre, le mouvement de la direction solaire est la résultante de son mouvement propre par rapport aux étoiles et de son entraînement par le mouvement diurne.

Les problèmes qui vont suivre s'appliquent à des durées suffisamment courtes pour que nous puissions considérer le Soleil comme une étoile, négligeant ainsi ses variations d'ascension droite et de déclination ; nous lui attribuerons pour déclinaison sa déclinaison vers le milieu de la période considérée.

Appelons *midi* et *minuit* en un lieu les instants de passage du Soleil au méridien supérieur et au méridien inférieur du lieu, respectivement.

PROBLÈME. — *On donne la latitude* φ *du lieu, et la déclinaison* D *du Soleil à l'époque considérée. On demande les hauteurs* H_1 *et* H_2 *du Soleil à midi et à minuit, respectivement.*

1) Cette question a été résolue à propos du mouvement diurne :

$$H_1 = \varphi + (90^\circ - D) = 90^\circ + \varphi - D,$$
$$H_2 = \varphi - (90^\circ - D) = -(90^\circ - \varphi - D),$$

en comptant les hauteurs à partir du côté nord de la méridienne.

Si H_1 et H_2 appartiennent tous deux à l'un des deux premiers quadrants, le Soleil, au-dessus de l'horizon, ne se couche pas : il y a jour seulement.

Si H_1 et H_2 appartiennent tous deux à l'un des deux derniers quadrants, le Soleil, au-dessous de l'horizon, ne se lève pas : il y a nuit seulement.

Si H_1 appartient à l'un des deux premiers quadrants, et H_2 à l'un des deux derniers, le Soleil se lève et se couche : il y a jour et nuit.

2) La solution graphique de ce problème est plus intéressante. Les figures 18 et 19 en fournissent deux exemples, le premier pour

les données $\varphi = + 51°$, $D = + 15°$, le second pour les données $\varphi = - 29°$, $D = - 12°$.

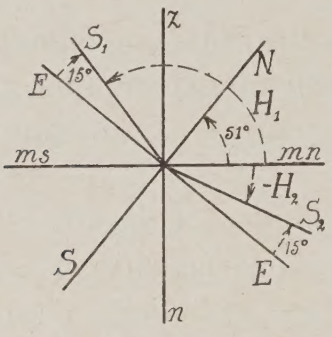

FIG. 18. Méridien du lieu.

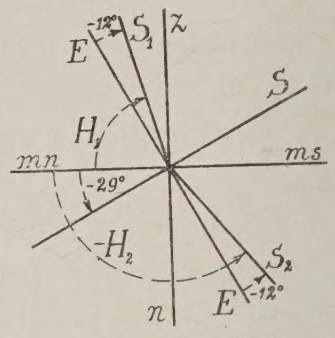

FIG. 19. Méridien du lieu.

$H_1 = 51° + 90° - 15° = 126°$.
$H_2 = 51° - 90° + 15° = - 24°$.

$H_1 = - 29° + 90° + 12° = 73°$.
$H_2 = - 29° - 90° - 12° = - 131°$

Comme plan de la figure, on prend le méridien. On y trace la verticale *zn* (zénith-nadir), la méridienne *mn-ms* (nord-sud), l'axe du monde NS (pôle nord-pôle sud) d'après la valeur de la latitude, et les deux directions méridiennes du Soleil (S_1 à midi, S_2 à minuit) d'après la valeur de la déclinaison. Des additions d'angles consécutifs fournissent les inconnues H_1 et H_2.

3) La discussion des valeurs H_1 et H_2 doit se faire pour les valeurs de φ comprises entre $+ 90°$ et $- 90°$, et pour les valeurs de D comprises entre $+ 23°27'$ et $- 23°27'$.

Dans ce but, construisons (fig. 20) un diagramme de la déclinaison solaire en fonction du temps, entre deux passages consécutifs du Soleil à l'équinoxe de printemps ; il suffit, dans cette construction, de considérer l'orbite solaire comme circulaire :

$$\sin D = \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \sin \epsilon ;$$

et les valeurs de D en nombre suffisant à la construction de la courbe auront pu se trouver graphiquement. Sur cette figure, menons les droites d'ordonnées constantes et égales à $(90° + \varphi)$ et à $(90° - \varphi)$.

Le segment de la parallèle à l'axe des ordonnées menée par le

point d'abscisse t, ayant son origine sur la courbe des D et son extrémité sur la droite $(90° + \varphi)$, mesure, en grandeur et en signe, la hauteur H_1 à l'époque t.

Le segment de la même droite, ayant son origine sur la courbe des D et son extrémité sur la droite $(90° - \varphi)$, mesure, en grandeur et en signe, la hauteur $(- H_2)$ à l'époque t.

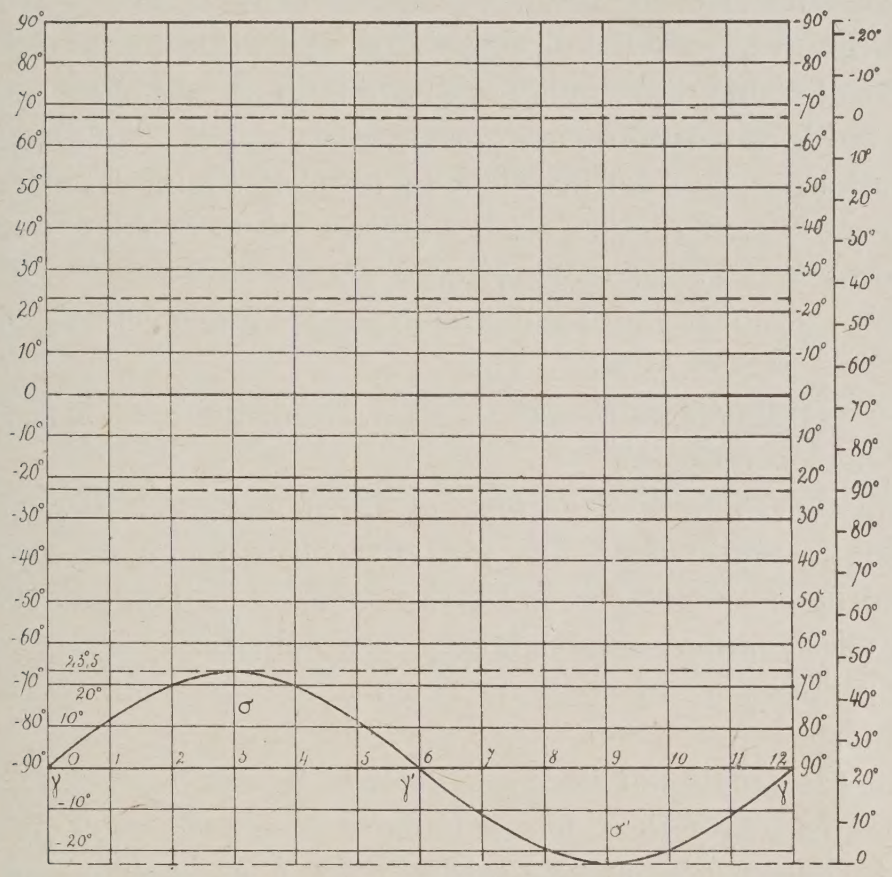

FIG. 20.

Graphique de la hauteur du Soleil à midi (H_1) et à minuit (H_2) en fonction de l'époque (fraction de T) et de la latitude φ. L'axe horizontal est divisé en douzièmes de T. La chiffraison verticale de gauche est celle des φ pour la recherche de H_1. La chiffraison verticale de droite est celle des φ pour la recherche de H_2. Une échelle isolée a été construite à droite pour la mesure des segments rectilignes obtenus sur le graphique.

Faisant varier φ de 90° à — 90°, et s'arrêtant aux valeurs particulières 90°, 90° — ϵ, ϵ, 0, — ϵ, — 90° + ϵ, — 90°, on arrive aux conclusions suivantes.

1. Le *pôle nord* ($\varphi = 90^\circ$) est éclairé de l'équinoxe de printemps à l'équinoxe d'automne ; il est dans l'ombre de l'équinoxe d'automne à l'équinoxe de printemps.

2. En un lieu de la *zone glaciale arctique* ($90^\circ > \varphi > 90^\circ - \epsilon$), il y a jour et nuit aux équinoxes ; au cours de l'année tropique, le cône diurne du Soleil est tangent à l'horizon deux fois par au-dessus et deux fois par au-dessous, laissant, de part et d'autre des solstices, des périodes de jours sans nuit et de nuits sans jour égales et d'autant plus longues que la latitude est plus grande.

3. Sur le *cercle polaire arctique* ($\varphi = 90^\circ - \epsilon$), il y a toujours jour et nuit, excepté au solstice d'été, où le Soleil, à minuit, ne descend pas sous l'horizon, et au solstice d'hiver où le Soleil, à midi, ne s'élève pas au-dessus de l'horizon.

4. Il y a jour et nuit en tout point situé entre les cercles polaires ($90^\circ - \epsilon > \varphi > -90^\circ + \epsilon$).

Sur le *tropique du Cancer* ($\varphi = \epsilon$), le Soleil atteint le zénith le jour du solstice d'été.

Dans la *partie nord de la zone torride* ($\epsilon > \varphi > 0$), le Soleil atteint le zénith deux fois par année tropique, à des époques symétriques par rapport au solstice d'été, et d'autant plus rapprochées des équinoxes que la latitude est moindre.

Sur l'*équateur* ($\varphi = 0$), le Soleil atteint le zénith à chaque équinoxe.

Dans la *partie sud de la zone torride* ($0 > \varphi > -\epsilon$), le Soleil atteint le zénith deux fois par année tropique, à des époques symétriques par rapport au solstice d'hiver, et d'autant plus rapprochées des équinoxes que la valeur absolue de la latitude est moindre.

Sur le *tropique du Capricorne* ($\varphi = -\epsilon$), le Soleil atteint le zénith le jour du solstice d'hiver.

5. Sur le *cercle polaire antarctique* ($\varphi = -90^\circ + \epsilon$), il y a toujours jour et nuit, excepté au solstice d'hiver où le Soleil, à minuit, ne descend pas sous l'horizon, et au solstice d'été où le Soleil, à midi, ne s'élève pas au-dessus de l'horizon.

6. En un lieu de la *zone glaciale antarctique* ($-90^\circ + \epsilon > \varphi$,

$\varphi > -90°$), il y a jour et nuit aux équinoxes ; au cours de l'année tropique, le cône diurne du Soleil est tangent à l'horizon deux fois par au-dessous et deux fois par au-dessus, laissant, de part et d'autre des solstices, des périodes de nuits sans jour et de jours sans nuit égales et d'autant plus longues que la valeur absolue de la latitude est plus grande.

7. Le *pôle sud* ($\varphi = -90°$) est dans l'ombre de l'équinoxe de printemps à l'équinoxe d'automne ; il est éclairé de l'équinoxe d'automne à l'équinoxe de printemps.

58. LEVER ET COUCHER DU SOLEIL. CRÉPUSCULE

Problème. — *On donne la latitude* φ *du lieu, la déclinaison* D *du Soleil à l'époque considérée. On convient de compter le temps à partir de minuit, à une horloge qui marque* m *au minuit suivant. On demande les instants,* t_1 *et* t_2, *du lever et du coucher du Soleil, et les azimuts,* A_1 *et* A_2, *de cet astre à chacun de ces instants.*

Ces questions ont été résolues à propos du mouvement diurne :

$$(t_1, t_2) = \frac{m}{2\pi} \arccos(\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg} D),$$

$$(A_1, A_2) = \arccos\frac{\sin D}{\cos\varphi}.$$

Discutant ces résultats, on obtient la condition pour que se réalisent les phénomènes étudiés : on retrouve évidemment la condition pour qu'il y ait jour et nuit. Les deux valeurs t_1, t_2 sont de signes contraires : la durée de la nuit est égale au double de leur valeur absolue, et la durée du jour est l'excès de m sur cette quantité.

1. Pour une valeur déterminée de D, les phénomènes étudiés se réalisent entre les parallèles de latitudes

$$\text{arc tg } \frac{\pm 1}{\text{tg D}} \text{ ou arc cos (sin D)} = (90^\circ - \text{D}) \text{ et } -(90^\circ - \text{D}).$$

Supposons, pour fixer les idées, que D soit positif.

Pour $\varphi = 90^\circ - \text{D}$, $t_1 = t_2 = 0$, $\text{A}_1 = \text{A}_2 = 0$, il y a contact à l'horizon à minuit, la nuit est nulle, et la durée du jour est égale à m. Lorsque φ diminue, les valeurs absolues communes à t_1 et à t_2, à A_1 et à A_2 augmentent, et la durée du jour diminue.

En particulier, sur l'équateur ($\varphi = 0$), $t_1 = m/4$, $t_2 = -m/4$; et le jour est égal à la nuit.

Lorsque $\varphi = -(90^\circ - \text{D})$, $t_1 = t_2 = m/2$, $\text{A}_1 = \text{A}_2 = 180^\circ$, il y a contact à l'horizon à midi, le jour est nul, et la durée de la nuit est égale à m.

2. Pour une valeur déterminée de φ, les phénomènes étudiés se réalisent pour les valeurs de D comprises entre

$$\text{arc tg } \frac{\pm 1}{\text{tg } \varphi} \text{ ou arc sin } (\pm \cos \varphi) = (90^\circ - \varphi) \text{ et } -(90^\circ - \varphi).$$

Ils se réalisent toujours entres les cercles polaires.

Supposons que φ soit positif. Suivons les valeurs A_1, A_2 pendant une année(tropique). En exprimant les résultats de cette discussion en langage ordinaire, il y a avantage à remplacer l'azimut par l'amplitude, dont la définition a été donnée en même temps que celle de l'azimut.

A l'époque de l'équinoxe de printemps, le cône diurne du Soleil se réduit au plan de l'équateur ; le Soleil se lève à l'est et se couche à l'ouest : les amplitudes du lever et du coucher sont nulles.

Dès le lendemain, la déclinaison du Soleil est positive, et le cône diurne a son ouverture dirigée vers le pôle élevé ; ses deux demi-droites d'intersection avec le plan de l'horizon se sont un peu déplacées vers le point cardinal nord : les amplitudes du lever et du coucher sont nord.

Cet éloignement vers le nord des demi-droites suivant lesquelles le Soleil se lève et se couche, l'une à partir de l'est, l'autre à partir de l'ouest, augmente tant que la déclinaison du Soleil croît, c'est-

à-dire pendant tout le printemps : pendant cette saison, les amplitudes des levers et des couchers sont croissantes et comptées vers le nord. A l'époque du solstice d'été, ces amplitudes nord atteignent leur maximum ; pendant l'été, les demi-droites du lever et du coucher du Soleil reviennent l'une vers l'est, l'autre vers l'ouest, où elles repassent à l'époque de l'équinoxe d'automne, et les amplitudes du lever et du coucher sont nord et décroissantes.

Pendant l'automne, ces demi-droites continuent leur mouvement vers le sud : les amplitudes du lever et du coucher sont sud et croissantes ; elles atteignent leur maximum à l'époque du solstice d'hiver, et ce maximum a même grandeur que le maximum des amplitudes nord à l'époque du solstice d'été.

Pendant l'hiver, le cône diurne se rapproche de l'équateur ; ses demi-droites d'intersection avec l'horizon reviennent l'une vers l'est, l'autre vers l'ouest : les amplitudes du lever et du coucher sont sud et décroissantes.

Donc, pendant l'année (tropique), les demi-droites suivant lesquelles le Soleil se lève et se couche oscillent dans l'horizon de quantités égales de part et d'autre l'une de la direction est, l'autre de la direction ouest. On comprend aussi que l'amplitude de cette oscillation est d'autant plus grande que la latitude est plus grande : en un point de l'équateur les amplitudes maxima sont de $23°27'$; en un point de l'un des cercles polaires, elles atteignent $90°$.

Crépuscule. — L'atmosphère terrestre fait précéder le lever du Soleil et suivre son coucher d'une période où les objets sont éclairés indirectement par la diffusion de la lumière solaire.

Le *crépuscule civil* est le temps pendant lequel la hauteur du Soleil est comprise entre 0 et $-6°$. Le *crépuscule astronomique* est le temps pendant lequel la hauteur du Soleil est comprise entre 0 et $-18°$.

Le crépuscule du matin s'appelle l'*aurore* ; il se termine au lever du Soleil. Le crépuscule du soir s'appelle la *brune* ; il commence au coucher du Soleil.

A une même époque, le crépuscule est d'autant plus court que le cône décrit par la demi-droite que détermine le Soleil coupe l'horizon plus normalement, et, par conséquent, que la latitude est moindre.

Problème. — A partir de quelle latitude le crépuscule (soit civil, soit astronomique) absorbe-t-il toute la nuit, au solstice d'été pour l'hémisphère nord, au solstice d'hiver pour l'hémisphère sud?

La solution se tire d'un croquis dans le méridien : on trouve ainsi une latitude de 60°33′ pour le crépuscule civil, et de 48°33′ pour le crépuscule astronomique.

Problème. — En un point terrestre de latitude supérieure à 60°33′ (ou 48°33′), pour quelle déclinaison du Soleil toute la nuit commence-t-elle à être absorbée par le crépuscule civil (ou par le crépuscule astronomique) ?

La solution se tire encore d'un croquis dans le méridien : ainsi, pour une latitude de 65° N, le crépuscule civil absorbera toute la nuit pour une déclinaison solaire non inférieure à $90° - 65° - 6° = 19°$, et le crépuscule astronomique pour une déclinaison solaire non inférieure à $90° - 65° - 18° = 7°$.

Le calcul de la durée du crépuscule est, à l'approximation actuelle, une application de l'un des problèmes relatifs au mouvement diurne : il suffit de joindre au calcul de l'instant du lever ou du coucher, celui de l'instant où la hauteur du Soleil est $-6°$ ou $-18°$.

Cercle d'illumination. — L'inégalité des jours et des nuits peut encore s'étudier par le déplacement sur la surface terrestre (supposée sphérique) du cercle d'illumination, cercle de la Terre très voisin d'un grand cercle, ligne de contact avec le cône circonscrit ayant le Soleil pour sommet et séparant l'hémisphère obscur de l'hémisphère éclairé.

59. SAISONS MÉTÉOROLOGIQUES. CLIMATS

En un même point terrestre, la quantité de chaleur reçue du Soleil par unité de temps varie avec la déclinaison de celui-ci : elle est d'autant plus grande que le jour est plus long et que la hauteur du Soleil est plus grande à midi.

1. En un point de l'*hémisphère nord,* elle augmente donc du solstice d'hiver, où elle est minimum, au solstice d'été, où elle est maximum ; et les phénomènes terrestres qui sont, comme les phénomènes de végétation, sous la dépendance de la chaleur reçue du Soleil, ont pour période l'année (tropique).

D'après l'activité des phénomènes de végétation, on a imaginé un cycle de quatre saisons dites *météorologiques* portant les mêmes noms que les saisons astronomiques, mais dont chacune commence une vingtaine de jours et nuits plus tôt que la saison astronomique de même nom ; la durée de quatre saisons météorologiques consécutives est égale à l'année (tropique).

2. En un point de l'*hémisphère sud,* la quantité de chaleur envoyée par le Soleil augmente du solstice d'été, où elle est minimum, au solstice d'hiver, où elle est maximum. Les phénomènes de végétation ont donc, dans l'hémisphère sud, la même période que dans l'hémisphère nord, mais avec une différence de deux saisons entre les époques d'égale activité. Les quatre saisons météorologiques de l'hémisphère sud portent les mêmes noms que les saisons astronomiques, mais chacune commence deux saisons et une vingtaine de jours et nuits plus tôt que la saison astronomique de même nom.

Il y a donc simultanément, du point de vue météorologique, respectivement dans l'hémisphère nord et dans l'hémisphère sud : printemps et automne, été et hiver, automne et printemps, hiver et été. Entre les tropiques, les variations, avec la déclinaison, de la chaleur reçue du Soleil ne se font plus sentir : de cette façon

s'établit, sans discontinuité, le passage des saisons météorologiques de l'hémisphère nord aux saisons météorologiques de l'hémisphère sud.

La quantité de chaleur *totale* envoyée par le Soleil pendant une année (tropique), en un point terrestre quelconque, est une fonction de la latitude, symétrique par rapport à l'équateur, où elle est maximum, et dont la dérivée seconde ne s'annule pour aucune valeur de la variable.

Le *climat* d'un point terrestre étant la résultante des conditions météorologiques en ce point, les lieux de même climat seraient des parallèles terrestres, si ces conditions météorologiques n'étaient pas influencées, de plus, par l'altitude, le régime moyen des vents et des courants marins, les masses continentales, etc. Cette étude est du ressort de la *météorologie*.

CHAPITRE III

DÉPLACEMENTS DE L'ÉCLIPTIQUE ET DE L'ÉQUATEUR

60. DÉPLACEMENTS SÉCULAIRES. PRÉCESSION

En *première approximation,* nous avons considéré comme constantes les coordonnées stellaires et écliptiques de chaque étoile.

En vue d'une *deuxième approximation,* dressons des listes des ascensions droites et des déclinaisons ou des longitudes et des latitudes de quelques étoiles, à des époques très éloignées les unes des autres. Nous constatons dans ces nombres des variations qui décèlent des déplacements de l'écliptique et de l'équateur par rapport à l'ensemble des étoiles.

Nous ne sommes pas encore à même de remonter aux causes de ces déplacements ; aussi ne pourrons-nous parler ici de ces phénomènes que d'une manière tout à fait élémentaire.

Soient OXYZ les axes écliptiques à une époque déterminée t_o ; l'axe OX est le rayon vernal γ_o à cette époque. Soit encore P_o la direction nord de l'axe du monde à la même époque ; cette direction, perpendiculaire à l'équinoxe γ_o, appartient nécessairement au plan YZ.

Appelons N et P les directions nord respectivement de l'axe de l'écliptique et de l'axe du monde à une autre époque quelconque $(t_o + t)$. Par hypothèse, les coordonnées polaires, (α_n, δ_n) et (α_p, δ_p), de ces deux directions sont des fonctions du temps ; et

admettons encore que ces coordonnées varient assez lentement pour pouvoir, à l'approximation actuelle, être considérées comme non périodiques pendant une durée suffisante : c'est ce qu'on exprime en disant qu'il ne s'agit ici que des déplacements *séculaires* de l'écliptique et de l'équateur. Écrivons leurs développements suivant les puissances croissantes du temps t :

$$\begin{cases} \alpha_n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots, \\ \delta_n = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots, \\ \alpha_p = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots, \\ \delta_p = d_0 + d_1 t + d_2 t^2 + \ldots. \end{cases}$$

La détermination, par l'observation, de ces coordonnées à n époques t_0, $(t_0 + t_1)$, $(t_0 + t_2)$, ... permet d'écrire un système de $4n$ équations en a_0, a_1, ... b_0, b_1, ... c_0, c_1, ... d_0, d_1, ... En prenant l'année (tropique) pour unité de temps, et en adoptant l'époque 1900,0 pour t_0, l'application des méthodes de la théorie des erreurs aux résultats des observations montre alors qu'à l'approximation actuelle, ces équations sont bien vérifiées par les valeurs

$$\begin{array}{llll} a_0 = 83^\circ 57' 3'', & a_1 = -\ 8'',69, & a_i = 0 & (i > 1), \\ b_0 = 90^\circ, & b_1 = -\ 0'',47, & b_i = 0 & (i > 1), \\ c_0 = 90^\circ, & c_1 = -\ 50'',37, & c_i = 0 & (i > 1), \\ d_0 = 90^\circ - 23^\circ 27' 8'', & d_1 = \quad 0'',00, & d_i = 0 & (i > 1); \end{array}$$

de sorte que, pour une durée de deux ou trois siècles de part et d'autre de 1900,0, on peut écrire :

$$\begin{cases} \alpha_n = 83^\circ 57' 3'' - 8'',69\, t, \\ \delta_n = 90^\circ - 0'',47\, t, \\ \alpha_p = 90^\circ - 50'',37\, t, \\ \delta_p = 90^\circ - 23^\circ 27' 8''. \end{cases} \quad (1)$$

(1) En réalité, ce n'est pas de cette manière empirique que ces formules ont été obtenues. La *mécanique céleste* démontre que les déplacements de l'écliptique sont dus aux attractions des planètes, et que les déplacements de l'équateur sont dus aux attractions du Soleil et de la Lune sur le renflement équatorial terrestre (voir au n° 98) ; partant de ces causes, elle établit les expressions des coordonnées des axes en fonction du temps. De plus, nous avons, dans ces

L'axe terrestre moyen, l'équateur moyen, l'équinoxe moyen, l'obliquité moyenne sont, par définition, l'axe terrestre, l'équateur, l'équinoxe, l'obliquité qui obéiraient à ces lois de deuxième approximation.

Ces expressions permettent la résolution de tous les problèmes relatifs aux déplacement séculaires de l'écliptique et de l'équateur.

Précession. — *Quelles sont les coordonnées polaires de l'équinoxe moyen de printemps à l'époque* $(1900 + t)$ *par rapport aux axes écliptiques de l'époque* 1900 ?

Ces coordonnées sont celles de l'une des deux directions de la droite d'intersection du plan de l'écliptique à l'époque $(1900 + t)$,

$$\sin \delta_n \sin \delta + \cos \delta_n \cos \delta \cos (\alpha - \alpha_n) = 0,$$

et du plan de l'équateur à la même époque,

$$\sin \delta_p \sin \delta + \cos \delta_p \cos \delta \cos (\alpha - \alpha_p) = 0.$$

On en tire, comme on sait,

$$\operatorname{tg} \alpha = - \frac{\cos \alpha_n \operatorname{tg} \delta_p - \cos \alpha_p \operatorname{tg} \delta_n}{\sin \alpha_n \operatorname{tg} \delta_p - \sin \alpha_p \operatorname{tg} \delta_n},$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\cos (\alpha - \alpha_n)}{\operatorname{tg} \delta_n} = \frac{\cos (\alpha - \alpha_p)}{\operatorname{tg} \delta_p}.$$

Pour simplifier les écritures, posons

$$\alpha_0 = 83^\circ 57' 3'', \quad \epsilon_0 = 23^\circ 27' 8''.$$

Le calcul fournit, pour longitude de l'équinoxe,

$$\operatorname{tg} \alpha = - \frac{\sin (0'',47 \,.\, t) \cos (\alpha_0 - 8'',69 \,.\, t) \operatorname{cotg} \epsilon_0 - \sin (50'',37 \,.\, t) \cos (0'',47 \,.\, t)}{\sin (0'',47 \,.\, t) \sin (\alpha_0 - 8'',69 \,.\, t) \operatorname{cotg} \epsilon_0 - \cos (50'',37 \,.\, t) \cos (0'',47 \,.\, t)}.$$

---

expressions, supprimé des décimales connues au terme en t, et négligé des petits termes encore appréciables en t^2 et t^3.

La mécanique céleste montre aussi que δ_n est en réalité une fonction périodique de t, mais de période extrêmement longue : l'équateur ne subit, par rapport à l'écliptique, qu'un très lent balancement dont l'amplitude ne peut pas excéder trois degrés.

Développons le second membre en série suivant les puissances croissantes de t. Les coefficients des termes en t^2, t^3, ... sont assez petits pour rendre, ici, ces termes négligeables :

$$\operatorname{tg} \alpha = -(50'',37 - 0'',47 \cos \alpha_o \operatorname{cotg} \epsilon_o)\, t.$$

Des deux angles α qui vérifient cette équation, la longitude de l'équinoxe de printemps est évidemment celui qui s'annule pour $t = 0$: d'où, à la même approximation,

$$\alpha = -(50'',37 - 0'',47 \cos \alpha_o \operatorname{cotg} \epsilon_o)\, t,$$

ou, tous calculs faits,

$$\alpha = -50'',26 \,.\, t.$$

On voit que la longitude de l'équinoxe diminue de 50'',26 par an. C'est en quoi consiste la rétrogradation ou la *précession de l'équinoxe*.

La précession fait décrire à l'axe terrestre moyen un cône autour de l'axe de l'écliptique. Il s'écoule

$$\frac{360 \times 60 \times 60}{50,26} = 26\,000 \text{ ans}$$

entre deux passages consécutifs de l'axe terrestre moyen dans un même demi-plan issu de l'axe de l'écliptique et fixe par rapport aux étoiles. La demi-ouverture de ce cône n'est pas tout à fait constante ; elle est égale à l'obliquité de l'équateur sur l'écliptique : 23°27'8'' à l'époque 1900,0, sa valeur à une autre époque est calculée dans le problème suivant. Quant à la latitude δ de l'quinoxe,

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} (0'',47\, t) \cos (\alpha_o + 42'' \,.\, t),$$

ou, négligeant comme ci-dessus les termes en t^2, t^3, ...,

$$\delta = 0'',47 . \cos \alpha_o . t = 0'',05 . t.$$

Variation de l'obliquité. — *Quelle est l'obliquité de l'équateur moyen sur l'écliptique à l'époque* $(1900 + t)$ *?*

Cette obliquité ϵ est mesurée par l'angle des deux directions N et P à l'époque proposée :

$$\cos \epsilon = \sin \delta_n \sin \delta_p + \cos \delta_n \cos \delta_p \cos (\alpha_n - \alpha_p),$$

ou

$$\cos \epsilon = \cos (0'',47 \,.\, t) \cos \epsilon_0 + \sin (0'',47 \,.\, t) \sin \epsilon_0 \cos (6^{\circ}2'57'' - 41'',68.\, t).$$

Comme au problème précédent, remplaçons le second membre par son développement en t limité au terme du premier degré :

$$\cos \epsilon = \cos \epsilon_0 + 0'',47 \sin \epsilon_0 \cos 6^{\circ}2'57'' \,.\, t,$$

ou, à la même approximation,

$$\epsilon = \epsilon_0 - 0'',47 \cos 6^{\circ}2'57''.\, t = \epsilon_0 - 0'',47.\, t.$$

On voit que, dans les siècles actuels, l'obliquité de l'écliptique diminue annuellement de $0'',47$: ainsi, le cône décrit par l'axe terrestre moyen autour de l'axe de l'écliptique 1900,0 subit actuellement une très lente diminution de sa demi-ouverture.

Réduction des coordonnées. — Connaissant les coordonnées écliptiques (G_0, L_0) ou stellaires (A_0, D_0) d'un astre par rapport aux axes de l'époque $t_0 = 1900{,}0$, on peut désirer connaître ses coordonnées, (G, L) ou (A, D), par rapport aux axes de l'époque quelconque $(1900 + t)$. — Inversement, l'observation ayant fourni les coordonnées d'un astre à une époque quelconque $(1900 + t)$, on peut désirer connaître ses coordonnées par rapport aux axes de 1900,0 ou, plus généralement, d'une époque quelconque $(1900 + t')$.

Nous ne ferons qu'indiquer ces problèmes qui se résolvent par des transformations de coordonnées.

En vingt siècles, le mouvement de l'écliptique n'a d'autre effet sur la longitude des étoiles situées près de l'écliptique qu'une diminution d'environ 5′, tandis que le déplacement de l'équateur, ou la précession, provoque une augmentation de près de 30° dans la longitude de toutes les étoiles.

Mouvement propre du périgée. — Nous savons que la longitude du périgée s'accroît de 61″,7 par année. De ces 61″7, 50,3 sont dues à la précession de l'équinoxe, origine des longitudes. Il reste, pour le mouvement propre du périgée, c'est-à-dire par rapport aux étoiles, un déplacement direct annuel de 61″,7 — 50″,3 = 11″,4.

61. DÉPLACEMENTS PÉRIODIQUES. NUTATION

En vue d'une *troisième approximation,* comparons les résultats d'observations peu distantes avec ce qu'ils auraient dû être pour obéir aux lois de deuxième approximation. Nous constatons :

1° que l'équinoxe vrai oscille autour de l'équinoxe moyen en une période de 18 ans 2/3, de façon à s'en écarter, deux fois pendant cette période, d'un angle maximum de 18″ ;

2° que l'obliquité vraie oscille autour de l'obliquité moyenne, en cette même période de 18 ans 2/3, de façon à s'en écarter, deux fois pendant cette période, d'un angle maximum de 9″.

Ainsi, pendant la période de la nutation, l'axe terrestre vrai décrit, autour de l'axe terrestre moyen, un mince cône elliptique d'ouvertures extrêmes de 36 et 18″, la première parallèlement, la seconde perpendiculairement à la surface du cône de précession.

62. VARIATION DES LATITUDES

Variation des latitudes. — La latitude de chaque point terrestre n'est pas absolument constante ; elle oscille de quelques dixièmes de seconde de part et d'autre de sa valeur moyenne.

Des observations coordonnées sur toute la surface du globe décèlent un déplacement de chacun des pôles suivant une courbe peu régulière le long de laquelle il tourne, autour du pôle moyen, à une distance d'au plus cinq à six mètres de celui-ci. Ce mouvement s'effectue presque constamment dans le sens direct, par

rapport à la direction nord de l'axe terrestre moyen, et résulte, en première approximation, de la superposition de deux mouvements uniformes, l'un circulaire et d'une périodicité de 7/6 d'année, l'autre elliptique et annuel. Le premier est dû à la non-rigidité de la Terre ; le second a pour cause les phénomènes ramenés par les saisons et dont la période est l'année, comme les perturbations atmosphériques et, peut-être, l'accumulation des glaces dans le voisinage du pôle nord en même temps que leur fonte partielle dans le voisinage du pôle sud, et inversement.

Déviation de la verticale. — La latitude est mesurée par un angle dont la verticale est l'un des côtés. L'étude des variations de la latitude d'un lieu a donc introduit la question des variations éventuelles de la verticale de ce lieu. L'instrument qui décèle ces variations est un *pendule horizontal,* masse rigide qui ne peut que tourner autour d'un axe théoriquement vertical, et très dissymétrique par rapport à cet axe. Le système est en équilibre indifférent lorsque cette condition est réalisée. Pratiquement cette condition n'est pas parfaitement remplie, et le système est en équilibre stable lorsque son centre de gravité est dans le vertical de son axe. Les déplacements de l'appareil décèlent les variations de la verticale avec une sensibilité qui atteint 0″,001. Il a été possible ainsi de dégager des observations une oscillation annuelle, et d'autres, parmi lesquelles une oscillation diurne de la verticale, en corrélation avec l'échauffement de la surface terrestre sous le rayonnement solaire.

CHAPITRE IV

MESURE DU TEMPS PAR LE SOLEIL

63. MESURE DU TEMPS PAR UN ASTRE QUELCONQUE

Le *temps* ou l'*heure* d'un astre, en un lieu terrestre, est l'angle horaire géocentrique de cet astre en ce lieu.

L'heure d'un astre est donc la même, à chaque instant, en tous les points d'un même méridien terrestre.

Le *jour* d'un astre est le temps qui s'écoule entre deux passages successifs de cet astre au méridien supérieur du lieu. Le jour se divise en 24 *heures*, l'heure en 60 *minutes*, la minute en 60 *secondes*. On donne aux jours, aux heures, aux minutes, aux secondes un nom qui, dans chaque cas, rappelle l'astre dont ils expriment le temps.

Le *midi* d'un astre est l'instant de son passage au méridien supérieur du lieu ; son *minuit* est l'instant de son passage au méridien inférieur.

Exemples. — 1. Le temps sidéral est l'angle horaire de l'équinoxe de printemps ; un jour sidéral est le temps qui s'écoule entre deux passages successifs de l'équinoxe de printemps, entraîné par le mouvement diurne, au méridien supérieur du lieu ; il se divise en 24 heures sidérales, en 24×60 minutes sidérales, en $24 \times 60 \times 60$ secondes sidérales.

2. Le *temps solaire vrai* est l'angle horaire du centre du Soleil ; un *jour solaire vrai*, ou jour vrai, est le temps qui s'écoule entre

deux passages successifs du Soleil, entraîné par le mouvement diurne, au méridien supérieur du lieu (*midi vrai*) ; il se divise en 24 heures de temps vrai, en 24×60 minutes de temps vrai, en $24 \times 60 \times 60$ secondes de temps vrai.

Remarques. — 1. Le jour de l'équinoxe moyen, ou *jour sidéral moyen,* est d'une durée constante ; à cause de la nutation, le jour sidéral vrai est légèrement variable autour du jour sidéral moyen.

2. La vitesse angulaire de l'équinoxe moyen par rapport à la Terre est la somme de la vitesse angulaire du mouvement diurne et de la vitesse angulaire du mouvement de précession ; elle est donc un peu supérieure à celle du mouvement diurne seul, et le jour sidéral moyen est plus court de 1/20 de seconde sidérale qu'un jour stellaire quelconque.

64. MESURE DU TEMPS PAR LE SOLEIL

Inégalité des jours solaires vrais. — Nos occupations se réglant sur la succession des jours et des nuits, il est naturel de baser la mesure du temps sur le mouvement du Soleil. L'unité de temps devrait donc être le jour solaire, ou un multiple, ou un sous-multiple de cette durée ; mais cette durée n'est pas constante.

En effet, la durée du jour solaire est liée à la vitesse angulaire de la projection équatoriale de la direction géocentrique du Soleil ; cette vitesse angulaire est l'excès de la vitesse angulaire uniforme du mouvement diurne (droitier) sur la vitesse angulaire du Soleil par rapport aux étoiles (mouvement gaucher) ; or, cette dernière vitesse n'est pas constante, à cause

1° de la non-uniformité du mouvement du Soleil dans l'écliptique, 2° de l'obliquité de l'écliptique sur l'équateur.

Depuis quelques jours avant l'équinoxe d'automne jusqu'au solstice d'hiver, l'excès du plus long jour solaire vrai sur le plus court atteint 50 secondes sidérales.

Le Soleil ne peut donc être adopté, tel quel, pour la mesure du temps.

Soleil fictif. — Le *Soleil fictif* serait un astre dont la direction géocentrique décrirait l'*écliptique* dans le sens direct (gaucher), *d'un mouvement uniforme,* et de manière à se confondre avec la direction géocentrique du Soleil vrai lors des passages de celui-ci *au périgée.* Son emploi pour la mesure du temps remédierait à la première cause d'inégalité des jours solaires vrais.

Négligeons le lent déplacement de la ligne des apsides par rapport à la ligne des équinoxes : si nous appelons G_0 la longitude du périgée, t_0 l'instant du passage du Soleil en ce point, et T la durée de l'année, le temps t et la longitude G_f du Soleil fictif sont liés par

$$G_f - G_0 = \frac{2\pi}{T}(t - t_0).$$

Soleil moyen. — Le *Soleil moyen* serait un astre dont la direction géocentrique décrirait l'*équateur* dans le sens direct (gaucher), d'un mouvement uniforme, et de manière à se confondre avec la direction géocentrique du Soleil fictif lors des passages de celui-ci *à l'équinoxe de printemps.* Son emploi pour la mesure du temps remédie aux deux causes d'inégalité des jours solaires vrais.

Si nous appelons t_γ l'instant du passage du Soleil fictif au rayon vernal, le temps t et l'ascension droite A_m du Soleil moyen sont liés par

$$A_m = \frac{2\pi}{T}(t - t_\gamma) ;$$

or, l'instant t_γ, où $G_f = 0$, est déterminé par

$$- G_0 = \frac{2\pi}{T}(t_\gamma - t_0) ;$$

et l'élimination de t_γ laisse la relation

$$A_m - G_0 = \frac{2\pi}{T}(t - t_0),$$

équation du mouvement du Soleil moyen en ascension droite.

Le *temps solaire moyen* est l'angle horaire du Soleil moyen ; un *jour solaire moyen* est le temps qui s'écoule entre deux passages successifs du Soleil moyen, entraîné par le mouvement diurne, au méridien supérieur du lieu *(midi moyen)* ; il se divise en 24 heures, en 24×60 minutes, et en $24 \times 60 \times 60$ secondes de temps moyen. La durée du jour solaire moyen correspond à ce que nous avons appelé jusqu'ici un jour et une nuit consécutifs.

Cadran solaire. — Un cadran solaire est une surface matérielle percée d'une tige rigide et sur laquelle est dessiné, partant du pied de cette tige, un faisceau de lignes telles que le nombre d'heures porté par chacune d'elles soit l'angle horaire du Soleil à l'instant où cette ligne est recouverte par l'ombre de la tige. La tige est dirigée suivant l'axe du monde ; alors, la surface étant donnée, ainsi que son orientation, le tracé des lignes d'heure en heure est la résolution d'un problème de géométrie descriptive. Le cadran solaire est habituellement plan, soit horizontal, soit vertical, et de préférence, dans ce dernier cas, à peu près perpendiculaire à la méridienne.

65. ÉQUATION DU TEMPS

L'*équation du temps* est l'excès du temps solaire moyen sur le temps solaire vrai. Notons H_m le premier de ces angles horaires, et H_v le second ; l'équation du temps est

$$E = H_m - H_v.$$

A l'instant où $H_v = 0$, $E = H_m$, et l'équation du temps se confond, à midi vrai, avec l'heure du Soleil moyen.

Nous savons que la différence des angles horaires de deux points est égale, au signe près, à la différence de leurs ascensions droites ; l'équation du temps est donc aussi égale à l'excès de

l'ascension droite A_v du Soleil vrai sur l'ascension droite A_m du Soleil moyen :

$$E = A_v - A_m. \quad (1)$$

Cherchons à exprimer E en fonction de A_v.

L'équation du mouvement du Soleil moyen est

$$\frac{2\pi}{T}(t - t_o) = A_m - G_o,$$

T étant la durée de l'année (tropique), et t_o l'instant du passage du Soleil vrai au périgée, dont la longitude est G_o.

L'équation du mouvement du Soleil vrai est de la forme

$$\frac{2\pi}{T}(t - t_o) = f(G_v - G_o),$$

où G_v est la longitude du Soleil vrai à l'instant t ; la fonction $f(G_v - G_o)$ a été établie. De plus,

$$\operatorname{tg} A_v = \operatorname{tg} G_v \cos \epsilon,$$

où ϵ est l'obliquité de l'écliptique.

La relation cherchée résulte de l'élimination de t, G_v et A_m entre les quatre dernières équations ci-dessus ; c'est donc

$$E = A_v - f\left[\operatorname{arc\ tg} \frac{\operatorname{tg} A_v}{\cos \epsilon} - G_o\right] - G_o.$$

Zéros de l'équation du temps. — Les zéros de l'équation du temps se réalisent pour les valeurs de A_v satisfaisant à l'équation

$$A_v = G_o + f\left[\operatorname{arc\ tg} \frac{\operatorname{tg} A_v}{\cos \epsilon} - G_o\right]$$

qui, transcendante en A_v, doit être résolue par approximations successives. En adoptant pour un instant, comme fonction f, celle à laquelle elle se réduit lorsqu'on néglige l'excentricité e,

(1) On dit souvent *équation du temps vrai* pour équation du temps, et *équation du temps moyen* pour la quantité qui a la même valeur absolue et le signe contraire : l'équation du temps moyen est donc l'angle horaire du Soleil vrai à midi moyen.

ainsi que la précession de l'équinoxe, on voit que cette équation admet quatre racines entre 0 et 2π.

Voici, à 1 sec. près, ces quatre racines :

$$A_v = 1^h34^m32^s, \quad 5^h29^m56^s, \quad 10^h40^m54^s, \quad 18^h13^m34^s.$$

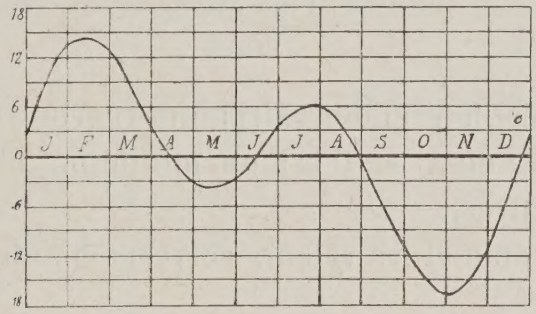

FIG. 21. — Diagramme de l'équation du temps

La figure 21 porte le *diagramme* de l'équation du temps pour une année (divisée en douze parties égales J, F, M, ...) ; les temps sont en abscisses à partir de l'instant où l'ascension droite du Soleil vrai est égale à $18^h42^m,5$; l'équation du temps est en ordonnée, avec la minute pour unité de mesure.

Maxima et minima. — Les *extrema* de l'équation du temps se réalisent pour les valeurs de A_v satisfaisant à l'équation

$$\frac{dE}{dA_v} \text{ ou } 1 - \frac{df(G_v - G_0)}{d(G_v - G_0)} \cdot \frac{\cos\epsilon}{\sin^2 A_v + \cos^2\epsilon \cos^2 A_v} = 0$$

qui, transcendante en A_v, doit être résolue par approximations successives. Pour fixer les idées, adoptons un instant, comme fonction f, celle à laquelle elle se réduit lorsqu'on néglige l'excentricité e ainsi que la précession de l'équinoxe : l'équation aux extrema se réduit à

$$\cos\epsilon = 1 - \cos^2 A_v \sin^2\epsilon,$$

et fournit, à cette très grossière approximation, entre 0 et 2π, les quatre racines

$$A_v = \text{arc cos}\left[\pm\frac{\sqrt{1-\cos\epsilon}}{\sin\epsilon}\right].$$

Nous trouverons donc quatre extrema. Déterminons encore leur nature. A la même approximation, l'équation du temps passe par un zéro pour $A_v = 0$; or, pour $A_v = 0$, la dérivée $\frac{dE}{dA_v}$ est, à l'approximation actuelle,

$$-\frac{1-\cos\epsilon}{\cos\epsilon},$$

et négative. Ainsi le premier extremum rencontré après celui qui est le plus voisin de $A_v = 0$ est un minimum, et ceci détermine la nature des autres.

Voici les extrema et les valeurs correspondantes de A_v :

$A_v =$	$3^h\ 24^m$,	$E = -\ 3^m 49^s$ (minimum),
	$8\ 22$,	$+\ 6\ 20$ (maximum),
	$14\ 33$,	$-\ 16\ 22$ (minimum),
	$21\ 39$,	$+\ 14\ 24$ (maximum).

66. TEMPS CIVIL, HEURE LÉGALE, HEURE UNIVERSELLE

Temps civil ; jour civil. — Le *temps civil* est le temps solaire moyen augmenté ou diminué de 12 heures suivant que le temps solaire moyen est ou n'est pas inférieur à 12 heures. — Le temps civil est donc ce qui serait l'angle horaire du Soleil moyen si les angles horaires se comptaient *à partir du méridien inférieur*. — Par opposition, on dit souvent *temps astronomique* au lieu de temps solaire moyen.

Le *jour civil* est la durée nécessaire au temps civil pour passer de 0 à 24 h. : c'est donc le temps compris entre deux passages consécutifs du Soleil moyen au méridien inférieur du lieu. Le jour civil commence à minuit moyen, douze heures moyennes *plus tôt* que le jour astronomique moyen qui portera le même numéro d'ordre dans la computation des jours.

Les astronomes ont toujours employé, tel quel, l'angle horaire

du Soleil moyen : c'est avec cet angle pour argument que sont dressées les éphémérides. Depuis 1920, les éphémérides nautiques françaises sont rédigées en fonction du temps civil. A partir du 1er janvier 1925, cette même substitution du temps civil au temps astronomique sera introduite dans l'*American Ephemeris,* le *Nautical Almanac* et la *Connaissance des Temps.*

Heure légale. —A chaque instant, le temps moyen civil, étant un angle horaire, est fonction simple de la longitude du lieu. Mais il est nécessaire que, dans toute l'étendue de chaque pays, soit adoptée une heure conventionnelle, dite *heure légale* (ou *heure officielle*), proche autant que possible de l'heure temps moyen civil sur le méridien moyen de ce pays. C'est ainsi que la Hollande a pour heure légale l'heure temps moyen civil du méridien d'Amsterdam.

Heure universelle ; fuseaux horaires. — La plupart des pays civilisés ont adopté pour heure légale l'heure temps moyen civil du méridien le plus voisin de leur méridien moyen, et dont la longitude est, par rapport à Greenwich, multiple de 15°. Dans ce système, dit de l'*heure universelle,* les heures légales ne peuvent différer que d'un nombre entier, avance pour les longitudes plus orientales, retard pour les longitudes plus occidentales.

On peut encore se représenter que, la Terre ayant été divisée en vingt-quatre fuseaux méridiens de 15° (dits *fuseaux horaires*) et le méridien milieu de l'un d'eux passant par Greenwich, chaque pays adopte l'heure du méridien milieu du fuseau auquel appartient la plus grande partie de son territoire.

D'après ce système, lorsqu'il est *zéro heure* en Grande-Bretagne, Belgique, France, Espagne, au Portugal, en Algérie, au Maroc (fuseau de l'Europe occidentale), — il est

une heure en Norwège, Suède, au Danemark, en Allemagne, au Luxembourg, en Autriche, Hongrie, Suisse, Italie, au Congo belge (fuseau de l'Europe centrale),

deux heures en Roumanie, Bulgarie, Grèce, Turquie, Égypte, au Cap (fuseau de l'Europe orientale),

trois heures à Madagascar,
huit heures en Chine, dans l'Australie de l'ouest,
neuf heures au Japon, dans l'Australie du centre,
dix heures dans l'Australie de l'est,
quinze heures, seize heures (Pacific Time), *dix-sept heures* (Mountain Time), *dix-huit heures* (Central Time), *dix-neuf heures* (East Time) et *vingt heures* (Intercolonial Time) dans les différents états de l'Amérique anglo-saxonne.

En 1916-1918, la division du globe en fuseaux horaires a été étendue à la mer pour les marines française, italienne et anglaise, moyennant des modifications apportées aux limites des fuseaux dans le voisinage des côtes, de manière à les raccorder aux limites territoriales des pays qui ont la même heure légale.

Cadran de vingt-quatre heures. — Les heures viennent d'être comptées de 0 à 24 heures pour plus de simplicité ; en réalité, ce n'est qu'en Belgique, en France, en Italie, au Canada et aux Indes anglaises que cette période de 24 heures consécutives remplace les deux périodes de 12 heures, dites du *matin* (de minuit à midi) et du *soir* (de midi à minuit).

Ligne internationale des dates. — A la mer et d'une île à l'autre de certains archipels océaniens, la *répétition du jour* du même numéro d'ordre pour qui va d'occident en orient, et le *saut d'un jour* pour qui va d'occident en orient devraient se faire sur le méridien de 180° ; dans la pratique, ils se font sur une ligne brisée peu distante de ce méridien et justifiée par des considérations géographiques et politiques : c'est la *ligne internationale des dates.*

Heure d'été. — Au cours d'une journée, notre temps d'activité ne se distribue généralement pas symétriquement par rapport au midi moyen : la durée de l'éclairage artificiel est plus grande le soir que le matin ; elle est généralement, le matin, nulle en été (dans l'hémisphère terrestre nord) et ceci pendant une période

d'autant plus étendue, de part et d'autre du solstice, que nous sommes moins matinaux.

Il y a là, au point de vue économique, une mauvaise distribution des heures d'activité, à laquelle on a proposé de remédier en avançant d'une heure le temps légal pendant une partie de l'année plus ou moins étendue, symétrique par rapport au solstice d'été.

Pendant la Grande Guerre, cette modification de la définition de l'heure légale a été adoptée dans un grand nombre de pays : elle semble devoir se maintenir.

67. ANNÉES

Année tropique. — L'*année tropique* est l'intervalle de temps compris entre deux passages consécutifs du Soleil à l'équinoxe de printemps moyen. C'est donc aussi le temps nécessaire à la longitude céleste du Soleil, partant de zéro, pour revenir à zéro ; ou encore l'ensemble des quatre saisons astronomiques.

Quel est l'angle décrit, pendant une année tropique, par la demi-droite géocentrique astreinte à passer par le centre du Soleil?

Si le rayon vernal était immobile par rapport aux étoiles, cet angle serait de 360° ; mais nous savons que la précession fait aller le rayon vernal au-devant du Soleil de manière que la direction de celui-ci rencontre l'équinoxe de printemps alors que sa direction géocentrique a encore 50″,26 à parcourir pour avoir balayé l'écliptique tout entier. Donc, pendant une année tropique, la demi-droite géocentrique du Soleil décrit un angle de 360° — 50″,26.

La définition de l'année tropique s'appuyant sur l'équinoxe moyen et non sur l'équinoxe vrai, est indépendante de la nutation.

Année sidérale. — L'*année sidérale* est le temps nécessaire à la longitude céleste du Soleil pour augmenter de 360°.

L'année sidérale S est égale à une année tropique T augmentée du temps nécessaire à la direction géocentrique du Soleil pour parcourir les 50″,26 de précession de l'équinoxe. Admettons que

la vitesse angulaire avec laquelle ce petit angle est décrit soit la vitesse angulaire moyenne pendant une année tropique ; alors,

$$S = T\left(1 + \frac{50,26}{360 \times 60 \times 60 - 50,26}\right).$$

Année anomalistique. — L'*année anomalistique* est le temps compris entre deux passages consécutifs du Soleil au périgée.

Pendant une année anomalistique, la direction géocentrique du Soleil décrit les 360° — 50″,26 de l'année tropique, plus les 50″,26 de précession de l'équinoxe, plus les 11″,7 de mouvement propre du périgée. Nous pouvons donc, au même degré d'approximation que ci-dessus, exprimer la durée P de l'année anomalistique, soit en fonction de l'année tropique T, soit en fonction de l'année sidérale S :

$$P = T\left(1 + \frac{50,26 + 11,7}{360 \times 60 \times 60 - 50,26}\right),$$

$$P = S\left(1 + \frac{11,7}{360 \times 60 \times 60}\right).$$

68. DURÉE DE L'ANNÉE TROPIQUE EN JOURS SIDÉRAUX ET EN JOURS MOYENS

Par définition du jour sidéral, du jour solaire moyen et de l'année tropique, si une année tropique contient N jours sidéraux, elle contient (N — 1) jours solaires moyens.

En effet, le mouvement du Soleil par rapport aux étoiles s'effectue en sens inverse du mouvement des étoiles par rapport à la Terre ; le Soleil passe donc au méridien supérieur d'un lieu terrestre moins souvent que l'équinoxe de printemps : il y a un passage de Soleil en moins au bout de chaque période nécessaire au Soleil pour faire un tour complet par rapport aux étoiles et revenir à l'équinoxe de printemps ; mais cette période est, par définition, l'année tropique.

Cherchons combien une année tropique renferme de jours sidéraux, et, par suite, de jours solaires moyens.

Observons la déclinaison du Soleil, chaque jour, à l'instant de son passage au méridien supérieur du lieu, jusqu'à ce que deux observations consécutives, donnant deux déclinaisons de signes contraires et dont la seconde soit positive, montrent que dans l'intervalle le Soleil a passé à l'équinoxe de printemps ; des déclinaisons observées et des heures sidérales aux instants des observations, une interpolation déduira l'heure sidérale θ_1 à l'instant du passage du Soleil à l'équinoxe de printemps.

Comptons le nombre n de fois que l'horloge sidérale marque cette même heure θ_1 jusqu'à ce que, par la comparaison de deux observations consécutives de la déclinaison du Soleil, nous constations un nouveau passage de cet astre au rayon vernal ; et soit θ_2 l'heure sidérale à l'instant de ce nouveau passage.

Dans l'intervalle de ces deux passages, l'angle horaire du rayon vernal s'est accru de

$$24^h \times n + \theta_2 - \theta_1,$$

et il s'est écoulé n jours sidéraux plus une fraction qui exprime le rapport de la différence $\theta_2 - \theta_1$, à 24 heures ; ainsi

$$n + \frac{\theta_2 - \theta_1}{24}$$

exprime le nombre de jours sidéraux contenus dans une année tropique.

Avec une approximation de cinq décimales, on trouve

$$T = 366{,}24222 \text{ jours sidéraux,}$$

et, par conséquent,

$$T = 365{,}24222 \text{ jours solaires moyens.}$$

La durée de l'année tropique n'est pas rigoureusement constante : elle diminue d'une seconde en 200 ans.

On en déduit les durées de l'année sidérale et de l'année anomalistique en jours sidéraux et en jours moyens.

Voici les durées (en 1900) de l'année tropique, de l'année sidérale et de l'année anomalistique, en jours moyens et fractions de jour moyen, à moins d'un dixième de seconde près :

année tropique $= 365^{j}\ 5^{h}\ 48^{m}\ 46^{s},0,$
année sidérale $= 365\ 6\ 9\ 9,5,$
année anomalistique $= 365\ 6\ 13\ 53,0.$

Les durées moyennes actuelles des saisons sont approximativement, en temps moyen :

Printemps	$92^{j}\ 21^{h},$
Été	$93\ 14\ ,$
Automne	$89\ 19\ ,$
Hiver	$89\ 0\ .$

69. RAPPORT DU JOUR SIDÉRAL AU JOUR MOYEN

L'année tropique T vient d'être exprimée en fonction du jour sidéral s et du jour moyen m :

$$T = s \times 366,24222,$$
$$T = m \times 365,24222 ;$$

donc

$$\frac{s}{m} = \frac{365,24222}{366,24222}.$$

On en déduit les relations :

$$m = s + 3\,\frac{56,56}{60}\ \text{minutes sidérales},$$

$$s = m - 3\,\frac{56,45}{60}\ \text{minutes de temps moyen.}$$

70. CALENDRIER

La construction du calendrier a pour objet de ranger dans le temps des événements survenus dans des jours civils différents.

Pour éviter les inconvénients du simple numérotage illimité des jours civils successifs, on groupe les jours en périodes. Il est avantageux de choisir pour ces périodes des ensembles de jours en harmonie avec la succession des saisons ; par exemple, si l'année tropique se composait exactement de 365 jours solaires moyens, donc de 365 jours civils, on grouperait les jours civils par ensembles de 365. La notation de l'époque d'un événement se composerait alors de trois termes :

1. un nombre, dit *millésime,* $N + 1$, où N exprimerait combien d'ensembles complets de 365 jours se sont écoulés depuis le commencement de tel jour civil choisi arbitrairement ;

2. un nombre, appelé *date,* $n + 1$, où n exprimerait combien de jours civils entiers se sont écoulés depuis la fin de la dernière période de 365 jours ;

3. un nombre H, l'*heure,* angle horaire du Soleil moyen à l'instant de l'événement considéré.

En réalité, le nombre des jours civils contenus dans une année tropique est compris entre 365 et 366, et le système précédent ne peut être considéré que comme une première approximation ; pour le perfectionner, il faut définir les *années civiles.*

On appelle *années civiles* des suites de nombres entiers de jours civils, tellés que l'ensemble de chacune soit aussi proche que possible d'une année tropique, l'une par défaut, l'autre par excès : l'année civile par défaut est une suite de 365 jours civils consécutifs ; l'année civile par excès est une suite de 366 jours civils consécutifs.

En deuxième approximation, considérons l'année tropique comme égale à 365,25 jours civils ; l'erreur commise ne sera plus que 0,00778 de jour civil, à moins de 0,00001 près.

Pour réaliser un pareil système, groupons les années civiles par

quatre, dont les trois premières soient des années civiles par défaut et la quatrième une année civile par excès.

Ce système réalise le *calendrier julien* mis en vigueur par J. César, vers l'an 48 avant J.-C. Plus tard, on a adopté pour premier jour de l'an *un* un jour voisin de celui de la naissance du Christ, constituant ainsi l'*ère chrétienne.*

En troisième approximation, donnons à l'année tropique une durée de

$$(365 + 0{,}25 - 0{,}01) \text{ jours civils ;}$$

elle deviendra trop courte, avec une erreur de 0,00222 de jour civil, à moins de 0,00001 près.

Le nouveau système consiste à grouper les années civiles par *cent ;* dans chaque groupe de cent années civiles, ou *siècle,* les trois premières sont des années civiles par défaut, et la quatrième par excès, — les trois suivantes par défaut, et la huitième par excès, et ainsi de suite, excepté pour la dernière du siècle, ou année séculaire, qui sera, comme les trois années qui la précèdent, une année civile par défaut.

La valeur de l'erreur encore commise, 0,00222 de jour civil en moins par année tropique, rend facile une quatrième approximation : celle-ci adoptera pour année tropique

$$(365 + 0{,}25 - 0{,}01 + 0{,}0025) \text{ jours civils,}$$

trop longue de seulement 0,00028 de jour civil, à moins d'un centmillième près.

C'est le système auquel on s'est arrêté : il groupe les années civiles par *quatre cents ;* les 399 premières années de cette période suivent la loi de l'approximation précédente, et la dernière est une année civile par excès.

En résumé, chaque quatrième année est une année civile par excès, ou, comme on dit, *bissextile,* à part toute année séculaire dont le millésime n'est pas divisible par quatre cents.

Ce système constitue le *calendrier grégorien,* mis en vigueur (par le pape Grégoire XIII) le 15 octobre 1582 ; l'erreur du calendrier julien était alors de 10 jours.

Les peuples de l'église grecque orthodoxe ont conservé le calendrier julien : la différence actuelle entre les deux calendriers est de 13 jours, les années grégoriennes 1700, 1800, 1900 n'ayant pas été bissextiles.

La très petite erreur que comporte encore cette approximation se réduirait considérablement, sans changer de signe, si on remplaçait l'an 4000, qui devrait être bissextile, par une année commune ; l'année tropique adoptée ainsi aurait pour valeur

$$(365 + 0{,}25 - 0{,}01 + 0{,}0025 - 0{,}00025) \text{ jours civils,}$$

trop longue de seulement 0,00003, à moins de 0,00001 près.

Le calendrier que nous venons de construire est un *calendrier solaire,* car il veille à ce que les mêmes dates correspondent à d'égales longitudes célestes du Soleil.

Pour éviter les dates exprimées par des nombres grands, et qui pourraient aller jusque 366, le calendrier divise l'année civile en *douze mois* de 28 (29), 30 ou 31 jours. Le deuxième mois est de 28 jours aux années communes, et de 29 jours aux années bissextiles.

Les tableaux suivants indiquent, pour 1920, et à très peu près pour une année civile quelconque, les dates des phénomènes qui ont pour période l'année tropique ou une période voisine, et que nous avons rencontrés jusqu'ici.

Cours du Soleil. Saisons astronomiques

3 janvier	passage au périgée,
20 mars	passage à l'équinoxe de printemps,
21 juin	passage au solstice d'été,
4 juillet	passage à l'apogée,
23 septembre	passage à l'équinoxe d'automne,
22 décembre	passage au solstice d'hiver.

Saisons météorologiques

1er mars	commencement du printemps météorologique (dans l'hémisphère nord, de l'automne dans l'hémisphère sud),
1er juin	commencement de l'été (de l'hiver),
1er septembre	commencement de l'automne (du printemps),
1er décembre	commencement de l'hiver (de l'été).

Équation du temps

12 février	premier maximum ($+ 14^m24^s$),
15 avril	premier zéro,
14 mai	premier minimum ($- 3^m49^s$),
14 juin	deuxième zéro,
26 juillet	deuxième maximum ($+ 6^m20^s$),
1er septembre	troisième zéro,
3 novembre	deuxième minimum (-16^m22^s),
25 décembre	quatrième zéro,

71. LA LONGITUDE PAR UNE HAUTEUR ET LE TEMPS

Problème. — *On donne : la latitude* φ *du point d'observation ; la hauteur géocentrique* H *de l'astre observé ; la lecture (éventuellement corrigée)* T_{mo} *d'un chronomètre réglé sur le méridien initial, faite à l'instant de l'observation ; et des éphémérides relatives à l'époque de l'observation.*

On demande la longitude λ *du lieu.*

A l'instant de l'observation, les coordonnées polaires géographiques de l'astre observé sont son angle horaire T_o sur le méridien initial et sa déclinaison D.

Désignons par A_m l'ascension droite du Soleil moyen, et par A l'ascension droite de l'astre observé; la première de ces coordonnées géographiques se calcule par

$$T_o = T_{mo} - (A - A_m),$$

A et A_m se lisant dans les éphémérides. De même, la seconde coordonnée D se lit dans les éphémérides.

Ces coordonnées polaires (T_o, D) satisfont à l'équation du cône géocentrique dont l'axe a pour coordonnées (λ, φ) et dont la demi-ouverture est $\left(\frac{\pi}{2} - H\right)$:

$$\sin \varphi \sin D + \cos \varphi \cos D \cos (T_o - \lambda) = \sin H ;$$

de cette équation on tire l'inconnue λ.

Remarques. — 1. L'envoi de signaux télégraphiques sans fil supplée à la lecture du chronomètre, et, écartant les erreurs inhérentes à cet instrument, permet une détermination plus précise de la différence des longitudes de deux stations.

2. Dans le cas particulier fréquent où l'astre observé est le Soleil, la différence $(A - A_m)$ est l'équation du temps, et se lit, telle quelle, dans les éphémérides.

3. Si, inversement, on donnait la longitude λ et demandait la latitude φ, le problème serait résolu par la même équation finale.

72. LE POINT PAR DEUX HAUTEURS ET LE TEMPS

Problème. — *On donne les hauteurs géocentriques,* H' *et* H'', *de deux astres observés; les lectures (éventuellement corrigées),* T'_{mo} *et* T''_{mo}, *d'un chronomètre réglé sur le méridien initial, faites aux instants des observations ; et des éphémérides relatives à l'époque des observations.*

On demande les coordonnées géographiques (λ, φ) *du point d'observation.*

Les coordonnées polaires géographiques (T'_o, D') et (T''_o, D'') des astres aux instants d'observation se déduisent des éphémérides comme il a été dit au numéro précédent. Ces coordonnées satisfont aux équations de deux cônes d'axe commun (λ, φ) et de demi-ouvertures respectives $\left(\frac{\pi}{2} - H'\right)$ et $\left(\frac{\pi}{2} - H''\right)$:

$$\sin\varphi \sin D' + \cos\varphi \cos D' \cos(T'_o - \lambda) = \sin H',$$
$$\sin\varphi \sin D'' + \cos\varphi \cos D'' \cos(T''_o - \lambda) = \sin H'',$$

équations en (λ, φ).

Ces équations sont transcendantes et seront avantageusement résolues par approximations successives. Dans la pratique, on connaît le plus souvent des coordonnées (λ_o, φ_o) du point. Posons

$$\varphi = \varphi_o + \Delta\varphi,$$
$$\lambda = \lambda_o + \Delta\lambda.$$

Les développements en séries des premiers membres des équations, suivant les puissances de $\Delta\varphi$, $\Delta\lambda$, et limitées aux termes du premier degré, laisseront deux équations linéaires en $\Delta\lambda$, $\Delta\varphi$, de la forme

$$\begin{aligned}&\Delta\lambda \cos D \cos \varphi_o \sin (T_o - \lambda_o)\\ &+ \Delta\varphi \,[\sin D \cos \varphi_o - \cos D \sin \varphi_o \cos (T_o - \lambda)]\\ &= \sin H - \sin D \sin \varphi - \cos D \cos \varphi \cos (T_o - \lambda).\end{aligned}$$

Remarques. — 1. En mer, les coordonnées approchées (λ_o, φ_o) se déduisent du point précédent par l'observation du *loch* et du *compas* : (λ_o, φ_o) est le *point estimé*.

2. Si les deux observations faites en mer ne sont pas simultanées, il faut tenir compte du déplacement du navire dans leur intervalle : si les variations estimées des coordonnées sont, pendant cet intervalle, $\delta\lambda$ et $\delta\varphi$, et si on demande les coordonnées à l'instant de la seconde observation, on devra, dans l'équation relative à la première, remplacer λ par $(\lambda - \delta\lambda)$ et φ par $(\varphi - \delta\varphi)$.

3. Par hypothèse, T_{mo} est une fonction linéaire de la lecture θ du chronomètre :

$$T_{mo} = a + b\theta\ ;$$

et chaque équation de cône est de la forme

$$\sin \varphi \sin D + \cos \varphi \cos D \cos (a + b\theta - \lambda) = \sin H.$$

Pour améliorer les valeurs a_o et b_o, actuellement adoptées pour a et b, posons

$$\begin{aligned}a &= a_o + \Delta a,\\ b &= b_o + \Delta b.\end{aligned}$$

En faisant quatre observations, nous aurons quatre équations en $\Delta\lambda$, $\Delta\varphi$, Δa, Δb ; des développements en séries les rendront linéaires.

Si on a pu faire plus de quatre observations, on aura autant d'équations linéaires à quatre inconnues. Si l'importance des résultats justifie de longs calculs, on les soumettra à l'une des méthodes de la théorie des erreurs.

4. Plaçons-nous dans le cas où l'on ne possède pas de valeurs estimées (λ_o, φ_o). Pour éviter la résolution des équations transcendantes, on pourra prendre trois hauteurs H′, H″, H‴, d'astres (T′$_o$, D′), (T″$_o$, D″), (T‴$_o$, D″) (1). Les équations correspondantes seront :

$$\frac{\cos D'}{\sin H'} \cos T'_o \cos \lambda + \frac{\cos D'}{\sin H'} \sin T'_o \sin \lambda + \frac{\sin D'}{\sin H'} \operatorname{tg} \varphi = 1,$$

$$\frac{\cos D''}{\sin H''} \cos T''_o \cos \lambda + \frac{\cos D''}{\sin H''} \sin T''_o \sin \lambda + \frac{\sin D''}{\sin H''} \operatorname{tg} \varphi = 1,$$

$$\frac{\cos D'''}{\sin H'''} \cos T'''_o \cos \lambda + \frac{\cos D'''}{\sin H'''} \sin T'''_o \sin \lambda + \frac{\sin D'''}{\sin H'''} \operatorname{tg} \varphi = 1.$$

En les soustrayant membre à membre deux à deux, on obtiendra trois équations de la forme

$$A_1 \cos \lambda + B_1 \sin \lambda + C_1 \operatorname{tg} \varphi = 0,$$
$$A_2 \cos \lambda + B_2 \sin \lambda + C_2 \operatorname{tg} \varphi = 0,$$
$$A_3 \cos \lambda + B_3 \sin \lambda + C_3 \operatorname{tg} \varphi = 0.$$

Ce sont les équations en (λ, φ) de trois plans qui ont, aux erreurs d'observation près, une droite commune. Deux d'entre elles détermineront (λ, φ), et la troisième sera une équation de vérification.

---

(1) M. ALLIAUME, *Les problèmes de navigation résolus par la géométrie analytique radiale*, Annales des Travaux publics de Belgique, octobre 1909.

CHAPITRE V

LA LUNE

73. LA TRAJECTOIRE LUNAIRE EN PREMIÈRE APPROXIMATION

L'aspect variable de la Lune, d'un mince croissant à un disque complet, s'explique en privant cet astre de lumière propre, et lui donnant une forme sensiblement sphérique : la lumière que la Lune envoie à la Terre est de la lumière solaire réfléchie, et l'apparence lunaire dépend des positions de la Lune et du Soleil par rapport à la Terre ; c'est ce que nous étudierons bientôt.

Déplacement de la direction géocentrique lunaire. — Comme le Soleil, la Lune participe au mouvement diurne : elle se lève en un point du demi-horizon limité par la méridienne et contenant l'est, et se couche en un point de l'autre demi-horizon.

L'observation simultanée de la Lune et d'étoiles dont les projections sont peu éloignées sur la sphère céleste rend facile l'étude du mouvement, par rapport aux étoiles, de la direction géocentrique lunaire. En première approximation, on constate que cette direction décrit, d'un mouvement à peu près uniforme, et dans le sens direct pour un observateur appartenant à la direction nord de l'axe du monde, un *plan* incliné sur l'écliptique d'un peu plus de 5°, — et que le temps nécessaire à ce que ce plan soit entièrement décrit est d'environ vingt-sept jours et un tiers.

De ce que le mouvement propre de la Lune se fait en sens

inverse du mouvement diurne, il résulte que le *jour lunaire,* ou intervalle de temps compris entre deux passages consécutifs de la Lune au méridien supérieur du lieu, est, comme le jour solaire, plus long qu'un jour sidéral. De plus, la révolution lunaire étant plus courte que la révolution solaire, le mouvement de la Lune en sens inverse du mouvement diurne est plus rapide que celui du Soleil, et le jour lunaire est plus long que le jour solaire moyen. Il est, en effet, de 24 h. 50 m. environ, et le passage de la Lune au méridien se fait, chaque jour, à peu près cinquante minutes plus tard que la veille.

On appelle *ligne des nœuds* la droite d'intersection du plan de l'écliptique et du plan de la trajectoire lunaire. Le centre de la Terre la partage en deux demi-droites. De celles-ci, la demi-droite en un point de laquelle la Lune passe de l'hémisphère écliptique sud à l'hémisphère écliptique nord est le *nœud ascendant :* la latitude céleste de la Lune y passe par zéro en devenant positive, de négative qu'elle était. La demi-ligne des nœuds en un point de laquelle la Lune passe de l'hémisphère écliptique nord à l'hémisphère écliptique sud est le *nœud descendant :* la latitude céleste de la Lune y passe par zéro en devenant négative, de positive qu'elle était.

Orbite lunaire. — Le diamètre apparent d'un astre est en raison inverse de son éloignement : ainsi, l'observation du diamètre apparent de la Lune pendant 28 jours permet de tracer une *courbe semblable* à la trajectoire de cet astre, et semblablement orientée, à la condition de faire rentrer les erreurs de parallaxe dans les erreurs d'observation.

Le diamètre apparent de la Lune varie de 29'34" à 33'34", et de façon que *la trajectoire de cet astre est une ellipse ;* un des foyers de cette ellipse est le centre de la Terre, et son excentricité est 1/18. L'extrémité de son grand axe la plus rapprochée de la Terre s'appelle le *périgée ;* l'autre est l'*apogée.*

En étudiant le déplacement de la direction géocentrique lunaire, comme nous avons étudié le déplacement de la direction géocen-

trique solaire, nous constatons que c'est encore la *loi des aires* qui lie la vitesse de cette direction à la position de la Lune le long de son orbite : les aires balayées par le rayon vecteur de la Lune sont proportionnelles aux temps nécessaires à les balayer.

PROBLÈME I. — *On donne : la longitude* Ω *du nœud lunaire ascendant, la longitude* G_0 *du périgée, et l'inclinaison* i *du plan de l'orbite sur l'écliptique.*

On demande la latitude L_0 *du périgée.*

La normale au plan de l'orbite a pour coordonnées polaires écliptiques $(\Omega - 90^\circ, 90^\circ - i)$. L'équation de ce plan est donc

$$\cos i \sin L - \sin i \cos L \sin (G - \Omega) = 0.$$

Le périgée appartient à l'intersection de ce plan avec le plan $G = G_0$; l'inconnue L_0 satisfait donc à

$$\operatorname{tg} L_0 = \operatorname{tg} i \sin (G_0 - \Omega).$$

PROBLÈME II. — On construit un système d'axes directs (gauchers) $OX_1Y_1Z_1$ ayant pour origine O le centre de la Terre, pour axe X_1 la direction du nœud lunaire ascendant, et pour axe Z_1 la perpendiculaire à l'orbite lunaire dirigée de manière à faire un angle aigu avec la direction nord de l'écliptique.

On donne la longitude Ω *du nœud ascendant, la longitude* G_0 *et la latitude* L_0 *de la direction du périgée.*

On demande, dans le système $X_1Y_1Z_1$, *l'angle de position* P *du périgée.*

L'angle P est l'angle qui va de la direction $(\Omega, 0)$ du nœud ascendant, dont les cosinus directeurs sont $(\cos \Omega, \sin \Omega, 0)$, à la direction (G_0, L_0) du périgée, dont les cosinus directeurs sont $(\cos G_0 \cos L_0, \sin G_0 \cos L_0, \sin L_0)$; par conséquent

$$\cos P = \cos L_0 \cos (G_0 - \Omega).$$

PROBLÈME III. — *On donne l'angle de position* P *de la direction du périgée dans le système* $OX_1Y_1Z_1$, *le demi-grand axe* a *de l'orbite lunaire, et l'excentricité* e *de cette orbite.*

On demande les équations cartésiennes de cette courbe par rapport aux axes $X_1Y_1Z_1$.

Dans le plan de l'orbite lunaire, par rapport à des axes provisoires X'Y', se coupant au foyer de l'ellipse, et tels que le périgée aurait une ordonnée nulle et une abscisse positive, l'équation de cette ellipse serait

$$(x' + ae)^2 + \frac{y'^2}{1 - e^2} = a^2.$$

Après une rotation de $(90^\circ - P)$ pour revenir aux axes $X_1Y_1Z_1$, les équations de cette courbe dans ce dernier système sont donc

$$(x \cos P + y \sin P + ae)^2 + \frac{(x \sin P - y \cos P)^2}{1 - e^2} = a^2, \quad z = 0.$$

PROBLÈME IV. — *On donne les coordonnées rectilignes écliptiques* (x, y, z) *d'un point, la longitude* Ω *du nœud ascendant, et l'inclinaison* i *du plan de l'orbite lunaire sur l'écliptique.*

On demande les coordonnées (x_1, y_1, z_1) *du point proposé, par rapport aux axes* $X_1\ Y_1\ Z_1$.

Les coordonnées polaires écliptiques de chacun des axes X_1, Y_1, Z_1 sont

axe X_1 .... $(\Omega, 0)$,
axe Y_1 .... $(\Omega + 90^\circ, i)$,
axe Z_1 .... $(\Omega - 90^\circ, 90^\circ - i)$.

Nous en déduisons leurs cosinus directeurs, et, par suite, les formules de transformations demandées :

$$x_1 = x \cos \Omega + y \sin \Omega,$$
$$y_1 = - x \sin \Omega \cos i + y \cos \Omega \cos i + z \sin i,$$
$$z_1 = x \sin \Omega \sin i - y \cos \Omega \sin i + z \cos i.$$

PROBLÈME V. — *On donne* a, e, P, Ω *et* i. *On demande les équations cartésiennes de l'orbite lunaire par rapport aux axes écliptiques.*

Il suffit de faire, dans les équations finales du problème III, la substitution définie au problème IV.

PROBLÈME VI. — *On donne* a, e, P, Ω, i *et l'obliquité* ε *de l'écliptique. On demande les équations cartésiennes de l'orbite lunaire par rapport aux axes stellaires équatoriaux.*

On sait qu'il suffit, dans les équations finales du problème précédent, de remplacer

$$\begin{aligned} y \text{ par} \quad & y\cos\epsilon + z\sin\epsilon, \\ z \text{ par} \quad & -y\sin\epsilon + z\cos\epsilon. \end{aligned}$$

74. DISTANCE DE LA LUNE

PROBLÈME. — *On fournit les équations*

$$F_1(a, x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0,$$

(dont la deuxième est du premier degré) de l'orbite lunaire, par rapport aux axes équatoriaux stellaires ; on en connaît toutes les constantes, sauf le demi-grand axe a.

En un point terrestre de coordonnées polaires géographiques (λ, φ, h) *et au temps sidéral* θ, *on observe la Lune, et on mesure ses coordonnées stellaires* (A, D).

On demande le demi-grand axe a.

Le problème est possible et déterminé ; car dans le plan

$$F_2(x, y, z) = 0$$

l'égalité

$$F_1(a, x, y, z) = 0$$

est l'équation d'une famille d'ellipses ; parmi les courbes de cette famille, l'orbite lunaire est celle qui a un point commun avec la ligne de visée (A, D).

Des coordonnées géographiques du point d'observation, on déduit les coordonnées rectilignes de ce point (x_t, y_t, z_t) par rapport aux mêmes axes (n° 38). Il faut encore passer de ces coordonnées terrestres aux coordonnées stellaires (x_s, y_s, z_s) du même point. Les axes Z des deux systèmes sont communs ; les plans X Y sont orientés dans des sens différents ; de X_s à X_t, l'axe X tourne d'un angle égal, au signe près, au temps sidéral sur le méridien initial, à savoir de l'angle $-(\lambda + \theta)$, à 2π près.

$$x_s = x_t \cos(\lambda + \theta) + y_t \sin(\lambda + \theta),$$
$$y_s = x_t \sin(\lambda + \theta) - y_t \cos(\lambda + \theta),$$
$$z_s = z_t.$$

Dans le système équatorial stellaire, les équations de la ligne de visée sont

$$\frac{x - x_s}{\cos A \cos D} = \frac{y - y_s}{\sin A \cos D} = \frac{z - z_s}{\sin D}.$$

Cette droite rencontre la courbe

$$F_1(a, x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0.$$

La condition de compatibilité des deux équations de cette courbe et des deux équations de la ligne de visée constitue une équation où a est la seule inconnue.

Pour augmenter la précision du résultat, il y a intérêt à faire les mêmes observations d'un certain nombre n de stations distribuées en diverses régions de la Terre. On aura ainsi un système de n équations à une inconnue que l'on traitera par une des méthodes de la théorie des erreurs.

Cas particulier. — On simplifie les conditions d'observation, ainsi que les calculs, en observant la Lune à son passage dans le méridien du lieu.

Supposons, pour fixer les idées, que ce soit dans le méridien supérieur. L'angle horaire de la Lune est alors égal à zéro, et son ascension droite, à 2π près, est égale à θ.

Cas particulier usuel. — Les astronomes appliquent ce problème de la façon suivante. La Lune est observée, le même jour, dans les méridiens de deux lieux terrestres dont les longitudes sont peu différentes, et de latitudes aussi différentes que possible. Appelons (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) les coordonnées rectilignes stellaires de ces deux points ; (A_1, D_1), (A_2, D_2) les coordonnées polaires des deux lignes de visée dans le même système ; θ_1, θ_2 les heures sidérales respectives des instants d'observation. Supposons, pour fixer les idées, que la Lune ait été observée dans le méridien inférieur du premier lieu, et dans le méridien supérieur du deuxième lieu, de manière que, à 2π près,

$$A_1 = \theta_1 + \pi, \quad A_2 = \theta_2.$$

Les instants d'observation ne diffèrent que du temps nécessaire à la Lune pour passer de l'un à l'autre méridien d'observation, c'est-à-dire d'un temps assez court pour qu'on puisse considérer la distance ρ de l'astre au centre de la Terre comme invariable dans l'intervalle.

Les équations de l'orbite peuvent donc être considérées comme étant, à l'époque des observations,

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2,$$
$$F_2(x, y, z) = 0,$$

dont la seconde est linéaire.

Les équations de la première ligne de visée sont

$$\frac{x - x_1}{-\cos\theta_1 \cos D_1} = \frac{y - y_1}{-\sin\theta_1 \cos D_1} = \frac{z - z_1}{\sin D_1}.$$

L'élimination de x, y, z entre ces quatre équations laisse une équation en ρ, dont on tire une première valeur ρ_1.

De même, les équations de la seconde ligne de visée sont

$$\frac{x - x_2}{\cos\theta_2 \cos D_2} = \frac{y - y_2}{\sin\theta_2 \cos D_2} = \frac{z - z_2}{\sin D_2}.$$

L'élimination de x, y, z entre ces deux équations et celles de la trajectoire circulaire laisse une équation en ρ, dont on tire une seconde valeur ρ_2.

La moyenne arithmétique $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ est une valeur de ρ à l'époque des observations, d'autant meilleure que la différence des longitudes des observateurs est moindre.

Connaissant ρ à une époque déterminée on en déduit sans peine le demi-grand axe a, comme il a été dit à propos du Soleil.

Remarque. — Supposons que les observateurs aient pu s'établir exactement dans le même méridien. Les deux observations se seraient faites au même instant, de temps sidéral θ.

Les équations des lignes de visée,

$$\frac{x - x_1}{-\cos\theta\cos D_1} = \frac{y - y_1}{-\sin\theta\cos D_1} = \frac{z - z_1}{\sin D_1},$$

$$\frac{x - x_2}{\cos\theta\cos D_2} = \frac{y - y_2}{\sin\theta\cos D_2} = \frac{z - z_2}{\sin D_2},$$

constituent un système de quatre équations en (x, y, z) théoriquement compatibles. Traitées par la théorie des erreurs, elles fourniront les meilleures valeurs de (x, y, z), coordonnées stellaires de la Lune à l'instant des observations : on en déduira

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \text{et } a. \text{ (1)}$$

En principe, la méthode générale ci-dessus et ses cas particuliers sont applicables à la distance de tout astre ; mais il n'y a, en réalité, que quelques astres qui se rapprochent assez de la Terre pour que les erreurs inévitables d'observation n'entraînent pas une incertitude inadmissible dans le résultat.

Parallaxe lunaire. — La distance moyenne a de la Terre à la Lune est égale à 60,27 fois le rayon terrestre équatorial R, ou environ 384 400 km.

---

(1) Dans ce cas particulier de deux observations simultanées, la mesure de la distance d'un astre ne diffère en rien d'une triangulation topographique, la circonstance des observations simultanées correspondant à celle de l'immobilité du point observé.

La distance ρ de la Terre à la Lune oscille de 56 à 64 rayons R. La *parallaxe lunaire* à un instant quelconque est le rapport (ρ : R) à cet instant ; connu pour un instant, il équivaut à la connaissance de ρ à cet instant. C'est la demi-ouverture du cône issu du centre de la Lune, et tangent à la Terre figurée par une sphère de rayon R.

La parallaxe lunaire à la distance moyenne, ou le rapport (a : R), mesure, en radian, un angle de 57′2″,5.

Rayon de la Lune. — Le rayon de la Lune se déduit simplement de la grandeur apparente de cet astre et de sa distance au même instant : il est égal aux 0,272 du rayon terrestre, ou 1740 km. environ.

75. LA TRAJECTOIRE LUNAIRE EN DEUXIÈME APPROXIMATION

En première approximation, nous avons pu attribuer des valeurs constantes à l'inclinaison sur l'écliptique du plan de l'orbite lunaire et à la longitude du nœud ascendant ; mais on s'aperçoit rapidement des variations de ces grandeurs.

1° L'inclinaison du plan de l'orbite varie de 5° à 5°18′ ; sa valeur moyenne est 5°8′43″, à moins d'une seconde près ; la période de son mouvement d'oscillation est de 173 jours.

2° La ligne des nœuds rétrograde de 3′10″,6 par jour : elle effectue, par rapport aux étoiles, une révolution complète en 6793 jours (18 ans et 2/3), durée dans laquelle on reconnaît la période de la nutation. Au 1er janvier 1920, la longitude du nœud ascendant était de 232°21′20″. (1)

---

(1) Quelles sont les déclinaisons extrêmes que la Lune peut atteindre ?
Si le plan de l'orbite lunaire se confondait avec le plan de l'écliptique, la déclinaison maximum de la Lune serait 23°27′ ; mais ces deux plans font un angle dont la plus grande valeur est 5°18′ ; la Lune atteint donc sa plus grande déclinaison absolue, soit boréale, soit australe, lorsqu'à son passage à la perpendiculaire à la ligne des nœuds, celle-ci se confond avec la ligne des équinoxes, et cette plus grande déclinaison est au plus égale à 23°27′ + 5 18′ = 28°45′. Les points les plus distants de l'équateur et qui puissent avoir la Lune au zénith ont donc une latitude de 28°45′ ; et en un point de, par exemple, 51° de latitude, la plus grande hauteur possible de la Lune est de 90° — 51° + 28°45′ = 67°45′.

De même, dans le plan de l'orbite, le grand axe est animé, par rapport aux étoiles, d'un mouvement de près de 6'41" par jour (jour solaire moyen), et de sens direct (gaucher) par rapport à la direction nord de l'axe de l'écliptique ; il décrit ainsi une révolution complète en 3233 jours, près de neuf années. Au 1er janvier 1920, la longitude du périgée était de 68°7'58", à moins d'une demi-seconde près.

Quant à la vitesse de la Lune le long de sa trajectoire, où nous avions d'abord reconnu la loi des aires, une étude plus attentive fait découvrir des anomalies dont les principales sont l'*évection,* la *variation* et l'*équation annuelle ;* elles sont fonctions de la position de la Lune par rapport au Soleil et à la Terre.

L'*évection* varie comme le sinus du double de la distance angulaire de la Lune au Soleil, diminuée de la distance angulaire de la Lune à son périgée; elle écarte la demi-droite géocentrique lunaire de la position qu'aurait celle-ci conformément à la loi des aires d'un angle dont le maximum est 1°20'.

La *variation* est proportionnelle au sinus du double de la distance angulaire de la Lune et du Soleil ; le maximum de l'écart qu'elle introduit est de 36' ; cet écart s'annule chaque fois que la distance angulaire de la Lune et du Soleil est nulle ou multiple de 90°

Enfin, l'*équation annuelle* a pour période l'année tropique ; sa plus grande influence est de 11'36".

76. RÉVOLUTIONS LUNAIRES

Nous avons déjà rencontré la *révolution lunaire sidérale,* temps nécessaire à la longitude de la Lune pour augmenter de 360° ; sa durée est de 27 j. 7 h. 43 m. 11 s., 5. (1)

La *révolution lunaire synodique,* ou *lunaison,* ou *mois lunaire,*

(1) Le jour, l'heure, la minute, la seconde, sans spécification, s'entendent du jour solaire moyen et de ses divisions.

est le temps nécessaire à la différence des longitudes du Soleil et de la Lune pour augmenter de 360°.

Par rapport aux étoiles, le Soleil et la Lune ont des mouvements de même sens : c'est dans le même sens que l'écliptique est balayée par le rayon vecteur de l'un et la projection du rayon vecteur de l'autre ; mais une révolution sidérale du Soleil est plus de douze fois plus longue qu'une révolution sidérale de la Lune ; ainsi, la différence des longitudes de ces deux astres s'annule périodiquement ; la période de ce phénomène est plus longue que la révolution sidérale lunaire, mais cet excès est d'autant moindre qu'est moindre le rapport de celle-ci à une révolution sidérale solaire.

Les mouvements angulaires du Soleil et de la Lune ne sont pas uniformes, et la révolution lunaire synodique a une durée variable. On appelle révolution lunaire synodique *moyenne* la durée constante qui serait celle de la révolution lunaire synodique si les mouvements angulaires du Soleil et de la Lune étaient uniformes, en gardant les mêmes durées pour leurs révolutions sidérales.

On voit aisément, comme à propos du problème élémentaire de la rencontre des deux aiguilles d'une montre, que les durées S_s d'une révolution sidérale solaire, S_l d'une révolution sidérale lunaire, et S_{sl} d'une révolution synodique moyenne sont liées par l'égalité

$$\frac{1}{S_{sl}} = \frac{1}{S_l} - \frac{1}{S_s}.$$

La durée S_s a été obtenue exactement ; la valeur de S_l vient d'être donnée ; on pourra donc calculer S_{sl} : on trouvera 29 j. 12 h. 44 m. 2 s., 8.

En réalité, comme nous le verrons bientôt (n° 79), c'est la durée S_{sl} que l'observation permet de mesurer avec précision ; et la relation qui vient d'être écrite est plutôt utilisée au calcul de S_l en fonction de S_s et de S_{sl}.

Le Soleil et la Lune sont en *conjonction* lorsque la différence de leurs longitudes est nulle, — en *opposition* lorsque cette différence est égale à 180° : ces phénomènes sont les *syzygies*. Une révolution synodique s'écoule entre deux conjonctions, ou entre deux oppositions consécutives.

Le Soleil et la Lune sont en *quadrature* lorsque la différence de leurs longitudes est égale à 90° ou à 270°.

L'*âge de la Lune* se compte *un jour* pendant les vingt-quatre heures qui suivent l'instant d'une conjonction, deux jours pendant les vingt-quatre suivantes, et ainsi de suite. L'âge de la Lune en un jour civil est l'âge de la Lune au midi de ce jour.

On distingue encore les révolutions tropique, anomalistique et draconitique.

La *révolution tropique* est l'intervalle de temps compris entre deux retours consécutifs de la Lune à une longitude céleste nulle ; sa durée est moindre que la révolution sidérale, du temps nécessaire au parcours de près d'un douzième de la constante de précession : 27 j. 7 h. 43 m. 4 s., 6.

La *révolution anomalistique* est l'intervalle de temps compris entre deux passages consécutifs de la Lune au périgée ; celui-ci, ayant un mouvement direct, fuit devant la Lune, et la durée de la révolution anomalistique est plus grande que celle de la révolution sidérale : 27 j. 13 h. 18 m. 33 s., 1.

La *révolution draconitique* est l'intervalle de temps compris entre deux passages consécutifs de la Lune au nœud ascendant : comme la ligne des nœuds est animée d'un mouvement rétrograde, elle va à la rencontre de la Lune, et la durée de la révolution draconitique est moindre que celle de la révolution sidérale : 27 j. 5 h. 5 m. 35 s., 5.

77. PHASES DE LA LUNE

D'un point de la surface terrestre, l'observateur n'aperçoit que la portion de la surface lunaire à la fois éclairée par le Soleil et d'où ce point terrestre est visible. Cette portion de la surface lunaire est le fuseau commun à l'hémisphère vu de ce point terrestre et à l'hémisphère dirigé vers le Soleil et limité par le

cercle de contact d'un cône tangent au Soleil et à la Lune (1) ; elle est variable avec la position relative de la Terre, du Soleil et de la Lune ; ces variations ont donc pour période la révolution synodique ; elles constituent ce qu'on appelle les *phases* de la Lune.

Nous introduirons dans leur étude quelques simplifications qui ne changeront en rien la nature du phénomène et ne rendront inexacts que de petites quantités les nombres que nous en tirerons :

1. Les demi-droites géocentriques solaire et lunaire sont animées de mouvements uniformes ;

2. Le plan de l'orbite lunaire se confond avec le plan de l'écliptique ;

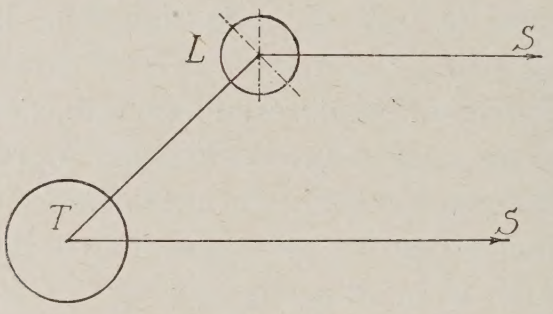

FIG. 22.

3. L'observateur est au centre de la Terre ;

4. Les droites joignant le centre de la Terre d'une part, le centre de la Lune d'autre part, au centre du Soleil font entre elles un angle négligeable.

Nous aurons la proposition suivante (indépendante de la simplification 1) :

La différence des longitudes du Soleil et de la Lune est égale à l'angle du fuseau éclairé et visible, ou à l'angle du fuseau obscur et invisible, suivant que cette différence est inférieure ou supérieure à deux droits ; la continuité s'établit d'elle-même dans le cas où cette différence est égale à deux droits.

La démonstration de cette proposition est immédiate.

---

(1) Les parties de la surface lunaire qui viennent d'être appelées des hémisphères sont, en réalité, des calottes sphériques un peu moindres que des demi-sphères ; mais l'erreur commise est évidemment négligeable.

Appliquons ce théorème à la recherche dès aspects suivant lesquels la Lune s'observe successivement pendant une révolution synodique ; commençons l'étude de celle-ci à une conjonction.

1. Le Soleil et la Lune sont en conjonction : la différence de leurs longitudes est nulle ; le fuseau éclairé et visible est nul ; la Lune est inobservable ; on dit qu'il y a *nouvelle Lune*. — La Lune passe au méridien presque au même instant que le Soleil, à peu près à midi.

2. La différence des longitudes augmente : un croissant lunaire devient visible et s'étend à partir du bord droit, pour un observateur situé du côté nord de l'écliptique. — La Lune passe au méridien entre midi et trois heures du soir, tant que la différence des longitudes est moindre que 45°.

3. La différence des longitudes atteint 45° ; le croissant visible couvre un huitième de la surface lunaire ; on dit que la Lune est au *premier octant*. — La Lune passe au méridien vers trois heures du soir.

4. La différence des longitudes continue d'augmenter : le croissant visible s'étend. — La Lune passe au méridien entre trois et six heures du soir, tant que la différence des longitudes est moindre que 90°.

5. Le Soleil et la Lune sont en quadrature pour la première fois : la différence de leurs longitudes est un angle droit ; le croissant a grandi jusqu'à couvrir un demi-hémisphère : la ligne de séparation de lumière et d'ombre apparaît comme un segment rectiligne ; on dit que la Lune est au *premier quartier*. — La Lune passe au méridien vers six heures du soir.

6. La différence des longitudes est comprise entre un droit et un droit et demi ; le fuseau visible continue de s'étendre vers l'autre bord. — La Lune passe au méridien entre six et neuf heures du soir.

7. La différence des longitudes atteint un droit et demi : le fuseau visible couvre trois huitièmes de la surface lunaire ; on dit que la Lune est au *troisième octant*. — La Lune passe au méridien vers neuf heures du soir.

8. La différence des longitudes est comprise entre un droit et demi et deux droits ; la partie visible de la Lune se rapproche d'un disque complet. — La Lune passe au méridien entre neuf heures du soir et minuit.

9. La différence des longitudes atteint deux droits : le Soleil et la Lune sont en opposition ; le fuseau visible est tout un hémisphère ; on dit qu'il y a *pleine Lune*. — La Lune passe au méridien vers minuit.

Dans la seconde partie de la révolution synodique, depuis l'opposition jusqu'à la conjonction suivante, les mêmes phénomènes se reproduisent dans l'ordre inverse ; le fuseau visible diminue en gardant son bord gauche, pour un observateur situé du côté nord de l'écliptique. Les passages de la Lune au méridien se font entre minuit et midi, à des heures d'autant plus avancées que la différence des longitudes est plus proche de 360°. On rencontre ainsi successivement : — le *cinquième octant,* où la différence des longitudes est de deux droits et demi ; les trois huitièmes de la surface lunaire sont encore visibles ; passage au méridien vers trois heures du matin ;

— la seconde quadrature, ou le *dernier quartier,* où la différence des longitudes est de trois droits ; un demi-hémisphère lunaire est encore visible, limité par deux demi-grands cercles dont l'un a pour perspective un segment rectiligne ; passage au méridien vers six heures du matin ;

— le *septième octant,* où la différence des longitudes est de trois droits et demi ; un huitième de la surface lunaire est encore visible ; passage au méridien vers neuf heures du matin.

A l'approche de la nouvelle conjonction, le croissant lunaire s'amincit de plus en plus, et finit par disparaître. La révolution synodique est accomplie, et le phénomène recommence.

Prédiction approchée des phases de la Lune. — Une suite de dix-neuf années tropiques contient un nombre à peu près entier de lunaisons, à savoir 235 ; donc, après une pareille période, appelée *cycle lunaire,* les mêmes dates ramènent les mêmes phases.

Un cycle lunaire a commencé un an avant notre ère.

Le *nombre d'or* d'une année est son numéro d'ordre dans un cycle lunaire :

l'an	1	a pour nombre d'or	2,
»	2	»	3,
»	20	»	$20 + 1 - 19 \times 1 = 2$,
»	1922	»	$1922 + 1 - 19 \times 101 = 4$;

le nombre d'or d'une année est ainsi le reste de la division par 19 de son millésime augmenté d'une unité.

Si les phases de la Lune ont été enregistrées pendant un cycle lunaire, la connaissance du nombre d'or d'une année quelconque suffit à la prédiction des phases de la Lune pendant cette année.

Lumière cendrée. — Dans le voisinage d'une conjonction, alors que la partie visible de la Lune se réduit à un mince croissant, une clarté confuse, la *lumière cendrée,* paraît émaner de la partie restante du disque lunaire. C'est un reflet des rayons solaires réfléchis par la Terre sur les régions de la Lune soustraites à la lumière directe du Soleil.

78. ASPECT. ROTATION. LIBRATION

Les instruments puissants permettent une étude détaillée de la surface lunaire ; on y reconnaît des montagnes, de nombreux cratères, des rainures, de grandes dépressions à fond peu accidenté. Ce sont ces dépressions qui apparaissent comme de grandes taches sombres quand on examine la Lune à l'œil nu ; on les appelle des *mers,* bien que l'absence complète de nuages prouve la sécheresse absolue de la surface lunaire. La description de la surface lunaire constitue la *sélénographie.*

La mesure des ombres portées par les montagnes lunaires permet de calculer l'altitude de celles-ci : on en trouve dont la hauteur atteint 8000 mètres.

La Lune n'a pas d'atmosphère ; celle-ci, en effet, si elle existait, dévierait le rayon lumineux reçu par l'œil d'un observateur terrestre et émané d'une étoile très près de disparaître derrière le disque lunaire ; ce rayon tournerait sa concavité vers la Lune et la portion de la sphère étoilée effectivement cachée par le disque lunaire aurait un diamètre apparent moindre que ce disque lui-même. Or, on ne constate rien de semblable.

La Lune tourne constamment vers la Terre le même hémisphère ; cet astre est donc animé d'un mouvement de rotation dont la durée est précisément égale à son mouvement de révolution autour de la Terre, dont le sens est celui de la révolution sidérale et dont l'axe est sensiblement perpendiculaire au plan de l'orbite.

Si la ligne de contact (appelée *terminateur*) du cône ayant pour sommet le centre de la Terre et circonscrit à la surface lunaire était vraiment un cercle invariable de cette surface, le mouvement angulaire de la Lune par rapport au centre de la Terre n'étant pas uniforme, il faudrait que le mouvement de rotation de la Lune ne fût pas uniforme non plus, mais lié d'une certaine façon à sa vitesse de translation par rapport aux étoiles et, par suite, à sa position sur son orbite. En réalité, le mouvement de rotation de la Lune est bien uniforme et la non-uniformité de son mouvement angulaire par rapport au centre de la Terre entraîne un balancement de l'hémisphère lunaire visible de celle-ci ; la partie de la Lune visible de la Terre s'accroît ainsi de deux minces fuseaux, découverts alternativement au cours d'une révolution sidérale, et coupés par le plan de l'orbite à peu près dans leur plus grande largeur ; ce phénomène s'appelle la *libration en longitude.*

De plus, l'axe de rotation de la Lune n'est pas tout à fait perpendiculaire au plan de l'écliptique ; il est incliné sur une perpendiculaire à ce plan d'un angle de 1°32′ et nous pouvons d'abord le considérer comme se déplaçant parallèlement à lui-même ; cette inclinaison permet à l'observateur terrestre d'apercevoir alternativement, au cours d'une révolution sidérale, deux minces fuseaux contenant l'un l'extrémité nord, l'autre l'extrémité sud de l'axe lunaire ; ce phénomène a reçu le nom de *libration en latitude.*

Les librations en longitude et en latitude font passer de la moitié aux 0,59 de la surface de la Lune l'ensemble des points de cet astre qui sont finalement visibles.

Dans ce qui précède, on a raisonné comme si la Terre était réduite à un point, ou comme si l'observateur se trouvait à son centre ; en réalité, l'observateur terrestre décrit en un jour sidéral une circonférence par rapport aux étoiles ; le point d'où il observe la Lune est donc variable, et il en résulte une troisième cause d'accroissement de la portion de la surface lunaire finalement visible : c'est la *libration diurne.*

L'équateur lunaire coupe le plan de l'orbite suivant une parallèle à la ligne des nœuds, à part une très petite inégalité périodique ; celle-ci ajoute aux librations purement optiques, dont il vient d'être question, une libration dite *libration réelle* ou *physique.*

79. ÉCLIPSES DE SOLEIL

Description du phénomène. — Considérons les deux nappes coniques issues d'un point terrestre M, et circonscrites, l'une au Soleil, l'autre à la Lune. Lors des conjonctions suffisamment voisines du passage de la Lune à un nœud, il arrive (fig. 23) que

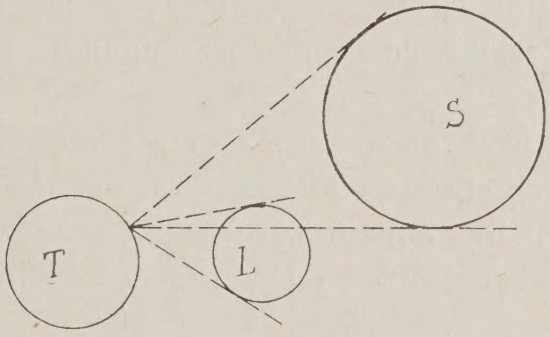

FIG. 23.

les parties d'espace intérieures à ces deux nappes ont une portion commune. Une partie au moins des rayons solaires, arrêtés par la Lune, n'arrivent plus au point terrestre M, et on dit qu'il y a *éclipse de Soleil* en ce point.

L'éclipse est *totale* lorsque le cône solaire appartient tout entier au cône lunaire : aucun rayon solaire n'arrive en M. L'éclipse est *annulaire* lorsque, inversement, le cône lunaire appartient tout entier au cône solaire : l'écran lunaire laisse visible en M une couronne découpée sur le disque lunaire.

L'éclipse totale ou annulaire est *centrale* au point M à un instant si, à cet instant, les axes des deux cônes sont confondus.

Une éclipse qui n'est, à un instant, ni totale, ni annulaire est *partielle* : l'observateur en M voit le disque solaire plus ou moins échancré par la Lune.

Au point M, l'éclipse peut, finalement, n'être que partielle ; si elle doit être totale ou annulaire, la période d'éclipse totale ou annulaire est précédée et suivie de périodes d'éclipses partielles.

Appelons (λ, φ) les coordonnées géographiques du point M, sans qu'il faille, ici, tenir compte de son altitude ; (A_s, D_s) et (A_l, D_l) les coordonnées stellaires du Soleil et de la Lune au point M ; R_s et R_l les demi-ouvertures des cônes solaire et lunaire définis ci-dessus, demi-diamètres apparents du Soleil et de la Lune ; et V la distance angulaire des centres de ces deux astres au point M :

$$\cos V = \sin D_s \sin D_l + \cos D_s \cos D_l \cos (A_s - A_l).$$

V, R_s, R_l sont des fonctions du temps t et des coordonnées (λ, φ). Telle est donc, pour le point terrestre (λ, φ), l'expression, en fonction du temps, de la distance angulaire du Soleil et de la Lune.

Les époques de l'année où il pourra y avoir éclipse de Soleil sont les conjonctions où la différence des déclinaisons du Soleil et de la Lune est petite. Supposons que, par l'examen des éphémérides, nous ayons découvert une pareille époque.

Prédiction des éclipses. — Problème I. — Proposons nous de *déterminer les instants où doivent commencer et finir les différentes phases du phénomène pour le point* M.

1. Aux instants du *premier et du dernier contact extérieur*,

$$V = R_s + R_l.$$

Les racines de cette équation en t sont les instants du commencement et de la fin du phénomène : le commencement correspond à la racine qui rend négative la dérivée $\frac{dV}{dt}$, et la fin à la racine qui rend cette dérivée positive.

Si les racines sont imaginaires, c'est que les directions du Soleil et de la Lune ne se rapprochent pas assez pour que le phénomène se produise.

2. Aux instants du *premier et du dernier contact intérieur,*

$$V = |R_s - R_l|.$$

Les racines de cette équation en t sont les instants du commencement et de la fin de l'éclipse totale ou annulaire, le commencement et la fin se distinguant comme lors des contacts extérieurs ; l'éclipse est totale ou annulaire suivant que la différence $(R_s - R_l)$ est négative ou positive.

Si l'équation des contacts extérieurs a des racines réelles, sans qu'il en soit ainsi de l'équation des contacts intérieurs, c'est que l'éclipse ne doit être que partielle.

3. L'instant du *milieu* du phénomène, où la distance angulaire des centres des deux astres est minimum, est racine de l'équation

$$\frac{dV}{dt} = 0.$$

Problème II. — *Quel est le lieu des points terrestres pour lesquels il y a contact extérieur ou intérieur à l'instant donné* t *?*

t étant donné, les équations en (λ, φ)

$$V = R_s + R_l,$$
$$V = |R_s - R_l|,$$

définissent deux courbes terrestres.

La première contient le lieu des points pour lesquels il y a contact extérieur (premier ou dernier) à l'instant donné ; c'est encore l'intersection de l'hémisphère terrestre éclairé et du cône circonscrit *intérieurement* au Soleil et à la Lune ; elle limite la

région à l'intérieur de laquelle l'éclipse est observable à cet instant.

La deuxième courbe contient le lieu des points pour lesquels il y a contact intérieur (premier ou dernier) à l'instant donné ; c'est encore l'intersection de l'hémisphère terrestre éclairé et du cône circonscrit *extérieurement* au Soleil et à la Lune ; elle limite la région à l'intérieur de laquelle il y a éclipse totale ou annulaire.

Problème III. — *Quel est le lieu terrestre pour lequel il y a éclipse centrale à l'instant* t ?

C'est l'un de ceux dont les coordonnées (λ, φ) satisfont aux deux équations

$$A_S = A_I, \qquad D_S = D_I,$$

dans lesquelles t est remplacé par la valeur donnée. Ces points sont les intersections de la surface terrestre et de la droite des centres du Soleil et de la Lune. De ces deux points, celui qu'on demande appartient à l'hémisphère terrestre éclairé.

Problème IV. — *Quelles sont les régions terrestres pour lesquelles le phénomène, soit partiel, soit total ou annulaire, est observable à un instant quelconque ?*

Ces régions sont limitées par les enveloppes des courbes terrestres

$$V = R_S + R_I,$$
$$V = |R_S - R_I|,$$

équations en (λ, φ), dans lesquelles le temps est un paramètre variable.

L'enveloppe de la première courbe limite la région terrestre où une phase du phénomène pourra être observée : ses points de contact avec la courbe enveloppée séparent, sur celle-ci, le lieu des premiers contacts extérieurs du lieu des derniers contacts extérieurs.

L'enveloppe de la deuxième courbe limite la région terrestre où l'éclipse totale ou annulaire pourra être observée : ses points de contact avec la courbe enveloppée séparent, sur celle-ci, le lieu

des premiers contacts intérieurs du lieu des derniers contacts intérieurs.

PROBLÈME V. — *Quelle est la courbe terrestre lieu des points pour lesquels l'éclipse est centrale à un instant quelconque ?*

L'équation en (λ, φ) de la courbe demandée résulte de l'élimination de t entre les égalités

$$A_s = A_l, \quad D_s = D_l ;$$

cette intersection de l'hémisphère éclairé et de la surface engendrée par la droite des centres des deux astres s'appelle la *ligne de centralité* du phénomène.

Remarque. — En général, chacune des solutions des problèmes précédents fournit une branche à adopter et une branche à rejeter; celle-ci est celle pour chacun des points de laquelle le Soleil est en dessous de l'horizon. Ces branches ne sont pas difficiles à séparer.

Cartes d'éclipses. — Les grandes éphémérides renferment, plusieurs années à l'avance, des cartes terrestres, dont chacune porte, pour chaque éclipse de Soleil, les principales courbes qui ont été définies dans les problèmes ci-dessus, et quelques autres :

1. Lieu des points où l'éclipse commence (ou finit) à telle heure, (d'heure en heure).
2. Limite boréale (australe) de l'éclipse totale (ou annulaire).
3. Limite boréale (australe) de simple contact : on sait que ces courbes 3 sont les enveloppes des courbes 1.
4. Lieu des points où l'éclipse commence (ou finit) au lever (ou au coucher) du Soleil.
5. Lieu des points où l'éclipse est à son milieu au lever (ou au coucher) du Soleil.

Solution pratique de première approximation. — Les solutions des cinq problèmes ci-dessus ne sont que théoriques, et inapplicables telles quelles. En effet, V, R_s, R_l ne sont pas connus explicitement en fonction de t, λ, φ. Les éphémérides donnent les

A_s, D_s, R_s, A_l, D_l, R_l d'une manière discontinue, pour des instants distincts, et par rapport au centre de la Terre ; l'application des formules de parallaxe fournissent leurs expressions aux mêmes instants pour le point (λ, φ). Aussi les solutions applicables dans la pratique ne peuvent elles que se guider sur les solutions ci-dessus. Elles procèdent par approximations successives. Nous nous contenterons ici de donner une *solution graphique du problème I* qui pourra, dans les recherches précises, servir de bonne solution de première approximation.

Dans le voisinage de la conjonction qui peut provoquer une éclipse de Soleil, on calcule, pour des instants distincts t, et d'après les éphémérides, les valeurs numériques de V, R_s et R_l. On se sert avantageusement d'un nomogramme pour la détermination des angles V en fonction des coordonnées stellaires locales des deux astres. R_s et R_l peuvent généralement être considérés comme constants pendant la durée du phénomène, et ne se calculer que pour un seul instant, par exemple celui de la conjonction.

Sur une même épure (fig. 24), on construit un triple diagramme, ayant les temps t pour abscisses communes, et pour

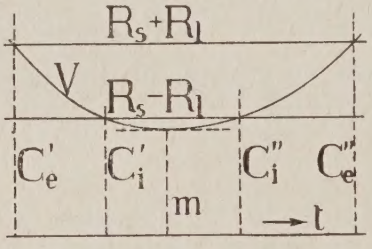

FIG. 24.
Diagramme pour la prédiction des phases d'une éclipse.

C'e, premier contact extérieur, commencement de l'éclipse partielle. — C'i, premier contact intérieur, commencement de l'éclipse totale. — m, milieu de l'éclipse générale. — C''i, dernier contact intérieur, fin de l'éclipse totale. — C''e, dernier contact extérieur, fin de l'éclipse partielle.

ordonnées les fonctions V, $(R_s + R_l)$, $|R_s - R_l|$, ou des mêmes fonctions de ces trois angles, comme cos V, cos $(R_s + R_l)$, cos $|R_s - R_l|$. Ce triple diagramme se dessine par points, d'après les calculs précédents : eu égard à la simplification qui vient d'être admise dans le calcul de R_s et de R_l, les lignes $(R_s + R_l)$, $|R_s - R_l|$

sont des parallèles à l'axe des temps, déterminées par un seul point.

Les abscisses des points d'intersection de la courbe V et de la ligne $(R_s + R_l)$ sont les instants du commencement et de la fin de l'éclipse générale.

Les abscisses des points d'intersection de la courbe V et de la ligne $|R_s - R_l|$ sont les instants du commencement et de fin de l'éclipse totale ou de l'éclipse annulaire.

L'abscisse du point de contact de la courbe V et de la tangente parallèle à l'axe des temps est l'instant du milieu du phénomène.

Durée de la révolution synodique. — Les éclipses de Soleil permettent la mesure de la révolution synodique moyenne. Se produisant aux conjonctions, deux éclipses de Soleil comprennent un nombre entier de lunaisons. La valeur moyenne, en jours moyens, d'une lunaison, entre deux éclipses, est donc le rapport du nombre de jours écoulés au nombre de pleines lunes. La durée obtenue est d'autant meilleure qu'un temps plus long s'est écoulé entre les deux éclipses.

80. OCCULTATIONS

L'*occultation d'une étoile* pour un point terrestre est sa disparition derrière la Lune, par rapport à ce point.

Les problèmes relatifs aux occultations sont identiques à ce que deviennent les problèmes relatifs aux éclipses de Soleil, lorsque

$$R_s = 0.$$

Le commencement et la fin du phénomène sont respectivement l'*immersion* et l'*émersion*. Il y a *appulse* lorsque le cône diurne de l'étoile n'est que tangent au cône visuel lunaire.

Graphiquement, en première approximation, les instants d'immersion et d'émersion se lisent sur un double diagramme de la distance angulaire V de l'étoile au centre de la Lune et du rayon apparent R_l de celle-ci, en fonction du temps.

Par le calcul, l'équation

$$V = R_1$$

lie les coordonnées (λ, φ) de l'observateur et l'instant d'observation de l'immersion ou de l'émersion. En notant cet instant, et en le substituant à t dans l'équation, on obtient l'équation en (λ, φ) de la courbe terrestre lieu des points où le phénomène s'observe à ce même instant. Si on connaît la latitude φ, cette équation peut servir au calcul de la longitude λ, ou inversement.

Parallaxe lunaire au moyen des occultations. — Les formules de prédiction des occultations renferment la distance de la Lune à la Terre ; inversement, on comprend que l'observation des instants d'immersion et d'émersion permette le calcul de la distance de la Lune. C'est ainsi que le passage de la Lune sur des groupes d'étoiles (les Pléiades, amas de Prœsépé) a fourni une des meilleures valeurs que l'on possède de la parallaxe lunaire à la distance moyenne : 57′2″,55.

81. ÉCLIPSES DE LUNE

Lorsqu'une opposition est suffisamment voisine d'un passage de la Lune à un nœud, il arrive que cet astre pénètre partiellement ou entièrement dans la portion d'espace limitée par le cône circonscrit, intérieurement ou extérieurement, au Soleil et à la Terre (fig. 25). On dit alors qu'il y a *éclipse de Lune*.

Lorsqu'un premier point de la Lune atteint le cône circonscrit intérieur (L_1), commence l'*éclipse par la pénombre* : ce point, recevant moins de rayons solaires, devient moins visible de la Terre.

Lorsqu'un premier point de la Lune atteint le cône circonscrit extérieur (L_2), commence l'éclipse proprement dite : ce point devient invisible de la Terre. A partir de cet instant, l'ombre portée par la Terre découpe dans le disque lunaire une échancrure de plus en plus grande.

Lorsqu'un dernier point de la Lune touche le cône circonscrit extérieur, alors qu'aucun autre point n'en est encore sorti (L_3), commence l'éclipse totale : la Lune entière devient invisible de la Terre.

La figure est dessinée comme si la droite des centres du Soleil et de la Terre appartenait au plan de l'orbite lunaire à l'époque

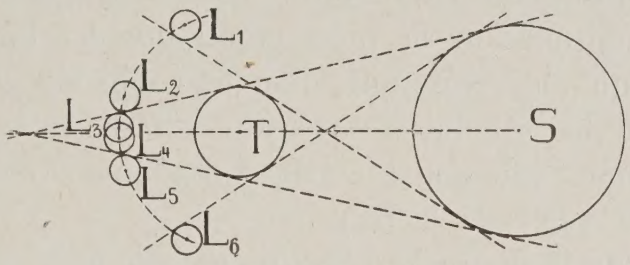

FIG. 25.

du phénomène. Comme il n'en est généralement pas ainsi, l'éclipse peut n'être que partielle. Elle peut aussi n'être qu'une éclipse par la pénombre.

Contrairement à ce qui a lieu pour une éclipse de Soleil, une éclipse de Lune est visible en même temps et de la même façon de tous les points de la Terre qui ont la Lune au dessus de leur horizon.

La forme circulaire de la ligne de séparation de lumière et d'ombre dans les éclipses de Lune est la preuve essentielle de la quasi-sphéricité de la Terre.

Saros. — On appelle *saros* une période de 223 lunaisons (18 ans et 11 jours) pendant laquelle les éclipses de Soleil et de Lune se produisent à peu près dans le même ordre et au bout des mêmes intervalles. Un saros renferme en moyenne 41 éclipses de Soleil et 29 éclipses de Lune.

Les éclipses de Soleil sont donc plus nombreuses que les éclipses de Lune ; mais, pour un lieu terrestre déterminé, sept éclipses de Soleil sur dix, en moyenne, sont inobservables, et, ainsi, les éclipses de Lune paraissent bien plus fréquentes.

82. POSSIBILITÉ DES ÉCLIPSES

Les éclipses de Soleil et les éclipses de Lune ne peuvent se produire que si la Lune est suffisamment près d'un des nœuds de son orbite soit à l'instant d'une conjonction, soit à l'instant d'une opposition. Nous allons chercher la plus grande valeur de la différence des longitudes de la Lune et du nœud à l'instant d'une syzygie pour qu'une éclipse soit possible à cet instant. Le problème revient à chercher quelle serait cette différence si, lors d'une syzygie, la Lune était tangente extérieurement au cône extérieur circonscrit au Soleil et à la Terre.

Pour plan de la figure (fig. 26), prenons le plan passant par le centre du Soleil, par le centre T de la Terre et perpendiculaire à l'écliptique ; ce plan contient le sommet du cône d'ombre ; soit f la demi-ouverture de celui-ci. De plus, à l'instant d'une syzygie, ce plan renferme le centre L de la Lune que nous supposons tangente au cône d'ombre, soit en L_1 dans le cas d'une *conjonction* (éclipse de Soleil), soit en L_2 dans le cas d'une *opposition* (éclipse de Lune).

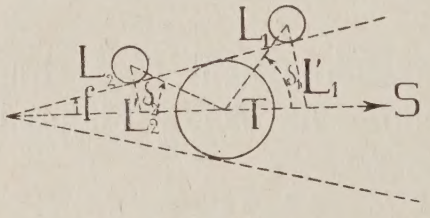

FIG. 26.
Plan perpendiculaire à l'écliptique.

Cherchons la latitude δ_1 ou δ_2 de la Lune à cet instant et dans cette hypothèse. Si L'_1 ou L'_2 est l'intersection de l'axe du cône et de la perpendiculaire abaissée de la Lune sur la génératrice,

$$\frac{TL_1}{\cos f} = \frac{L_1L'_1}{\sin \delta_1} = \frac{LT'_1}{\cos(\delta_1 - f)}$$

ou

$$\frac{TL_2}{\cos f} = \frac{L_2L'_2}{\sin \delta_2} = \frac{TL'_2}{\cos(\delta_2 + f)}.$$

Or, visiblement, si R est le rayon de la Terre et ρ celui de la Lune,

$$L_1L'_1 = R + \rho + TL'_1 \sin f,$$
$$L_2L'_2 = R + \rho - TL'_2 \sin f.$$

Nous sommes en présence de trois équations en δ_1, $L_1L'_1$, TL'_1, ou en δ_2, $L_2L'_2$, TL'_2. L'élimination des deux dernières inconnues laisse l'équation en δ_1 ou en δ_2 :

$$\sin \delta_1 - \sin f \cos (\delta_1 - f) = \frac{R + \rho}{TL_1} \cos f.$$

ou

$$\sin \delta_2 + \sin f \cos (\delta_2 + f) = \frac{R + \rho}{TL_2} \cos f.$$

Mais δ_1, δ_2 et f sont des angles petits et, sans erreur appréciable,

$$\delta = (\delta_1 \text{ ou } \delta_2) = \frac{R + \rho}{TL} \pm f,$$

plus ou *moins* suivant qu'il s'agit d'une éclipse de Soleil ou d'une éclipse de Lune.

Si, d'autre part, α est la longitude de la Lune, N la longitude du nœud voisin, et i l'obliquité du plan de l'orbite lunaire sur l'écliptique, l'équation de ce plan est

$$\cos i \sin \delta \pm \sin i \cos \delta \sin (\alpha - N) = 0,$$

plus ou *moins* suivant que le nœud voisin est ascendant ou descendant ; d'où, dans tous les cas,

$$\sin |\alpha - N| = \operatorname{cotg} i \,.\, \operatorname{tg} \delta.$$

La limite $|\alpha - N|$ demandée est donc fournie par l'équation

$$\sin |\alpha - N| = \operatorname{cotg} i \,.\, \operatorname{tg} \left(\frac{R + \rho}{TL} \pm f \right).$$

Pour calculer $|\alpha - N|$ dans les conditions qui le rendent maximum, il faut donner

à i sa valeur minimum, 5°,

à TL sa valeur minimum, 56 R,

à f sa valeur maximum ou minimum suivant qu'il s'agit d'une éclipse de Soleil ou d'une éclipse de Lune, 16'47" ou 14'47".

Enfin $\rho = 0{,}272\ R$, et

$$\sin|\alpha - N| = \operatorname{cotg} 5^\circ . \operatorname{tg}\left[\left(\frac{1 + 0{,}272}{56} \cdot \frac{10\,800}{\pi}\right)' + 16'47''\right]$$

ou

$$\sin|\alpha - N| = \operatorname{cotg} 5^\circ . \operatorname{tg}\left[\left(\frac{1 + 0{,}272}{56} \cdot \frac{10\,800}{\pi}\right)' - 14'47''\right].$$

Tous calculs faits, pour une éclipse de Soleil,

$$|\alpha - N| = 18^\circ 24'$$

et pour une éclipse de Lune,

$$|\alpha - N| = 12^\circ 9''.$$

L'éclipse de Soleil est donc impossible si, lors de la conjonction, la Lune se trouve, en longitude, à 19°, ou plus, du nœud ; et, lors de l'opposition, l'éclipse de Lune est impossible si cette différence de longitude est 12°, ou davantage.

TROISIÈME PARTIE

COORDONNÉES HÉLIOCENTRIQUES

CHAPITRE PREMIER

LE SYSTÈME SOLAIRE

83. MOUVEMENT APPARENT DES PLANÈTES

Parmi les astres qui ne sont pas des étoiles, nous avons étudié jusqu'ici le Soleil et la Lune. Donnons provisoirement le nom de *planètes* aux autres astres errants. Observons les mouvements de leurs projections sur la sphère étoilée, en relevant, à courts intervalles, leurs ascensions droites et leurs déclinaisons ; nous pourrons en déduire leurs longitudes et latitudes célestes.

Nous constatons que les latitudes célestes des planètes sont toujours faibles : les projections des planètes sur la sphère étoilée ne quittent pas la zone zodiacale.

Les longitudes vont généralement en croissant, mais parfois en décroissant ; on appelle *élongations* les périodes pendant lesquelles les longitudes sont croissantes, — *rétrogradations* les périodes pendant lesquelles elles sont décroissantes. La vitesse angulaire des planètes, par rapport aux étoiles, va en augmentant pendant environ la première moitié de chaque élongation, en diminuant pendant la seconde moitié ; cette vitesse devient nulle

à l'instant où l'élongation finit et où la rétrogradation commence ; cet instant est une *station* du mouvement planétaire ; pendant la rétrogradation, la vitesse angulaire passe de même par un maximum, pour revenir à zéro ; cette nouvelle station est le commencement de l'élongation suivante.

Chaque planète a, de la sorte, dans le voisinage de l'écliptique, un mouvement compliqué dont la trajectoire se projette sur la sphère céleste suivant une courbe sinueuse, longs arcs de sens direct que les rétrogradations réunissent par des boucles parcourues en partie dans le sens du mouvement diurne.

Parmi les planètes, il y en a deux dont le mouvement angulaire est manifestement lié au mouvement du Soleil : leurs distances angulaires au Soleil sont toujours moindres que 32° pour l'une, que 53° pour l'autre. Ces deux planètes sont *Mercure* et *Vénus ;* on dit que la *plus grande digression* de Mercure est égale à 32°, que la plus grande digression de Vénus est égale à 53°. Mercure est difficilement visible, à cause de son trop grand voisinage du Soleil. Lorsque sa lumière n'est pas perdue dans l'éclat du Soleil, Vénus se lève immédiatement avant le lever du celui-ci (étoile du matin), ou apparaît à l'occident dès le commencement du crépuscule (étoile du soir). Mercure et Vénus sont les *planètes inférieures.*

Rien de semblable ne se remarque pour les autres planètes, dites *planètes supérieures : Mars, Jupiter, Saturne, Uranus* et *Neptune ;* leurs distances angulaires au Soleil atteignent périodiquement 180°. La propriété commune aux planètes inférieures suffit cependant à faire attribuer au Soleil un rôle plus important qu'aux autres astres errants.

84. TRANSLATION DE LA TERRE

Adoptons donc le centre du Soleil pour nouvelle origine des coordonnées ; et créons-y le système des *coordonnées écliptiques héliocentriques* en déplaçant parallèlement à eux-mêmes les axes du système écliptique géocentrique.

Par définition, la *ligne héliocentrique des équinoxes* est le nouvel axe X, dirigé vers l'*équinoxe héliocentrique de printemps ;* et la *ligne héliocentrique des solstices* est le nouvel axe Y, dirigé vers le *solstice héliocentrique d'été.*

Par rapport au Soleil, le centre de la Terre décrit, dans le plan de l'écliptique, en sens inverse du mouvement diurne, et conformément à la loi des aires, une ellipse dont le centre du Soleil occupe un des foyers ; et cette ellipse est égale à l'orbite du Soleil par rapport à la Terre.

Les deux extrémités du grand axe de l'ellipse terrestre sont le *périhélie,* du côté du foyer occupé par le Soleil, et l'*aphélie,* du côté opposé : le passage, par rapport à la Terre, du Soleil au périgée, et le passage, par rapport au Soleil, de la Terre au périhélie sont un même phénomène ; les passages du Soleil à l'apogée et de la Terre à l'aphélie se correspondent de même.

La longitude géocentrique du Soleil est égale, à chaque instant, à la longitude héliocentrique de la Terre augmentée de 180°.

Le mouvement *réel* est-il celui du Soleil autour de la Terre ou de la Terre autour du Soleil ?

Si l'univers était composé de la Terre et du Soleil seuls, la question n'aurait aucun sens ; avec un univers tel qu'il est, la question a encore besoin d'être précisée par cette *définition* qu'on entend par *mouvement réel* le mouvement *par rapport à l'ensemble des étoiles.*

Or, les coordonnées géocentriques des étoiles sont légèrement variables, et ces variations ont pour période l'année sidérale. C'est donc la Terre qui est animée, par rapport aux étoiles, d'un mouvement de translation autour du Soleil. Abstraction faite de la précession et de la nutation, son axe se déplace parallèlement à lui-même en faisant un angle de 23°27′ avec la perpendiculaire à l'écliptique.

85. ABERRATION DE LA LUMIÈRE

Par rapport au système de repère constitué par l'ensemble des étoiles la lumière se propage en ligne droite et avec la même vitesse dans toutes les directions. La vitesse de propagation de la lumière, par rapport à ce système, est de 300 000 km. à la seconde.

Le déplacement de l'observateur terrestre, par rapport à l'ensemble des étoiles, incline la direction apparente d'un astre observé sur la direction vraie de cet astre : c'est en quoi consiste l'*aberration de la lumière.*

Vitesse de la lumière. — Rappelons d'abord brièvement comment les *physiciens* déterminent la vitesse de la lumière.

1. *Méthode de la roue dentée.* — Un faisceau de lumière parallèle tombe normalement sur le pourtour d'une roue dentée dont les pleins et les creux ont même largeur, et de manière à passer entièrement ou à être complètement arrêté suivant la position de la roue. Il va frapper normalement un miroir situé à a km., et revient vers la roue. Si la roue est immobile, le faisceau revient vers sa source. La roue est mise en mouvement et sa vitesse est accrue jusqu'à ce qu'une dent vienne arrêter le faisceau qui a traversé le creux précédent. Si α est la largeur d'une dent, v la vitesse périphérique de la roue et V la vitesse de la lumière, on a à cet instant

$$\frac{\alpha}{v} = \frac{2a}{V},$$

d'où V en fonction de quantités mesurables.

Un nouvel accroissement de vitesse fait reparaître, puis arrête le rayon de retour, d'où à cet instant une nouvelle équation en V ; et ainsi de suite.

On a trouvé ainsi, à la seconde, avec $a = 8{,}7$ km.,

$$V = 300\,400 \text{ km.} + \theta . 1000 \text{ km.}, \quad -1 \leqslant \theta \leqslant +1 ;$$

puis dans des circonstances plus favorables

$$V = 299\,990 \text{ km.}$$

2. *Méthode du miroir tournant.* — Un rayon lumineux est lancé horizontalement par un miroir tournant autour d'un axe vertical, tombe normalement sur un miroir fixe, et revient au miroir tournant qu'il rencontre dans une autre position. Il est réfléchi suivant une direction inclinée sur sa direction de départ d'un angle fonction de la vitesse de la lumière, de la vitesse de rotation du miroir et de la distance du miroir fixe. Inversement, la vitesse de la lumière se déduit de la déviation du rayon et des autres grandeurs énumérées.

Ce procédé a donné, à la seconde,

$$V = 299\,940 \text{ km.} + \theta.\,100 \text{ km.}, \quad -1 \leqslant \theta \leqslant +1.$$

La vitesse de la lumière mesurée par les physiciens est la vitesse de la lumière dans l'air ; pour en déduire la vitesse dans le vide, il faut la multiplier par 1,0003.

Problème. — *On donne : 1° la vitesse* V *de la lumière par rapport aux étoiles ; 2° les coordonnées apparentes héliocentriques* (α, δ) *d'une étoile* A, *à un instant* t, *pour un observateur terrestre* O ; *3° les composantes* (v_x, v_y, v_z), *suivant les axes, de la vitesse* v *du point* O *au même instant.*

On demande les coordonnées polaires $(\alpha + \Delta\alpha, \delta + \Delta\delta)$ *de la direction* OA *à l'instant* t.

Soit V′ la vitesse de la lumière, à l'instant t, par rapport à l'observateur en mouvement. Le vecteur représentatif de la vitesse absolue V est la somme géométrique des vecteurs représentatifs de la vitesse relative V′ et de la vitesse d'entraînement v :

$$(V) = (V') + (v)$$

ou

$$(-V) = (-V') + (-v).$$

Cette égalité géométrique entre les vecteurs se traduit par trois égalités algébriques entre leurs projections :

$$\begin{aligned} V\cos(\alpha+\Delta\alpha)\cos(\delta+\Delta\delta) &= V'\cos\alpha\cos\delta - v_x,\\ V\sin(\alpha+\Delta\alpha)\cos(\delta+\Delta\delta) &= V'\sin\alpha\cos\delta - v_y,\\ V\sin(\delta+\Delta\delta) &= V'\sin\delta - v_z ; \end{aligned}$$

ou

$$\left(1-\frac{V'-V}{V'}\right)\cos(\alpha+\Delta\alpha)\cos(\delta+\Delta\delta) = \cos\alpha\cos\delta - \frac{v_x}{V'},$$

$$\left(1-\frac{V'-V}{V'}\right)\sin(\alpha+\Delta\alpha)\cos(\delta+\Delta\delta) = \sin\alpha\cos\delta - \frac{v_y}{V'},$$

$$\left(1-\frac{V'-V}{V'}\right)\sin(\delta+\Delta\delta) = \sin\delta - \frac{v_z}{V'}.$$

Ce sont les équations du problème de la parallaxe pour une translation des axes dont les composantes seraient égales à

$$\xi = -\frac{v_x}{V'} = -\frac{v_x}{V}\cdot\frac{V}{V'},$$

$$\eta = -\frac{v_y}{V'} = -\frac{v_y}{V}\cdot\frac{V}{V'},$$

$$\zeta = -\frac{v_z}{V'} = -\frac{v_z}{V}\cdot\frac{V}{V'}.$$

La vitesse v de l'observateur est une faible fraction de la vitesse V de la lumière, et le rapport $\frac{V}{V'}$ ou $\left(1-\frac{V'-V}{V'}\right)$ diffère peu de l'unité. Ainsi, les composantes ξ, η, ζ sont des quantités petites. Négligeant leurs carrés et produits, et appliquant la deuxième et la troisième des formules approchées de parallaxe,

$$\Delta\alpha = \left(\frac{v_x}{V}\frac{V}{V'}\sin\alpha - \frac{v_y}{V}\frac{V}{V'}\cos\alpha\right)\sec\delta,$$

$$\Delta\delta = \left(\frac{v_x}{V}\frac{V}{V'}\cos\alpha + \frac{v_y}{V}\frac{V}{V'}\sin\alpha\right)\sin\delta - \frac{v_z}{V}\frac{V}{V'}\cos\delta.$$

V' pourrait se tirer de la première formule approchée de parallaxe ; mais le rapport $\frac{V}{V'}$ ou $\left(1 - \frac{V' - V}{V'}\right)$ diffère peu de l'unité, et la différence $\frac{V' - V}{V'}$ est petite comme $\frac{v_x}{V}, \frac{v_y}{V}, \frac{v_z}{V}$. On gardera donc la même approximation en remplaçant, dans les dernières équations, $\frac{V}{V'}$ par l'unité ; alors,

$$V \cdot \Delta\alpha = (v_x \sin\alpha - v_y \cos\alpha) \text{ séc } \delta,$$
$$V \cdot \Delta\delta = (v_x \cos\alpha + v_y \sin\alpha) \sin\delta - v_z \cos\delta.$$

On sait que ces formules ne sont applicables que pour autant que l'angle de pente δ n'est pas voisin de $\pm \frac{\pi}{2}$.

Aberration diurne, aberration annuelle. — Appelons (v'_y, v'_y, v'_z) les composantes de la vitesse de l'observateur par rapport aux axes écliptiques géocentriques, et (v''_x, v''_y, v''_z) les composantes de la vitesse d'un point de ces axes par rapport aux axes héliocentriques :

$$v_x = v'_x + v''_x,$$
$$v_y = v'_y + v''_y,$$
$$v_z = v'_z + v''_z.$$

Les corrections d'aberration $\Delta\alpha$ et $\Delta\delta$ se composent donc de termes en (v'_x, v'_y, v'_z) et de termes en (v''_x, v''_y, v''_z).

Les premiers sont fonctions de la latitude et de l'heure, et ont pour période le jour sidéral : ils corrigent l'*aberration diurne.*

Les seconds sont fonctions de la longitude héliocentrique de la Terre, et ont pour période l'année sidérale : ils corrigent l'*aberration annuelle.*

Aberration planétaire. — Si l'astre observé est lui-même en mouvement, comme l'est une planète, par rapport à l'ensemble des étoiles, il faut encore tenir compte de ce qu'il se déplace pendant que sa lumière arrive à l'observateur ; c'est en quoi

consiste l'*aberration planétaire*. Il suffit, pour la corriger, de remplacer l'instant t de l'observation par $(t - \tau)$, où τ est le temps mis par la lumière pour passer de l'astre à l'œil de l'observateur.

86. ORBITES PLANÉTAIRES

Étude d'une orbite planétaire. — Cherchons la *nature* des orbites planétaires dans le système écliptique héliocentrique. Admettons que ces trajectoires sont fermées et assez simples pour que les durées de leurs révolutions sidérales leur restituent les mêmes coordonnées.

Après une élongation et une rétrogradation, les directions héliocentriques de la Terre et de la planète forment le même angle ; la somme des durées moyennes d'une élongation et d'une rétrogradation est donc égale au temps nécessaire à la différence des longitudes de la Terre et de la planète pour augmenter de 360° : c'est la *révolution synodique* S_{pt} de la planète, qui est ainsi connue.

On établit facilement la relation suivante entre cette révolution synodique, la révolution sidérale S_p de la planète, et la révolution sidérale S_t de la Terre, ou année sidérale :

$$\left| \frac{1}{S_p} - \frac{1}{S_t} \right| = \frac{1}{S_{pt}}.$$

Cette équation permet le calcul de S_p.

Faisons deux observations dont les époques soient séparées par une ou plusieurs révolutions sidérales de la planète. A chacune de ces observations, mesurons la longitude et la latitude géocentriques de la planète, en faisant rentrer les erreurs de parallaxe dans les erreurs d'observation, et mesurons aussi la longitude géocentrique du Soleil :

1re observation	planète : G′, L′ ;	Soleil : G'_0 ;
2me observation	G″, L″ ;	G''_0.

Soient ρ' et ρ'' les distances du Soleil lors des deux observations. L'équation polaire de l'ellipse solaire permet le calcul de ρ' et ρ'' en fonction du demi-grand axe de cette orbite, de son excentricité, de la longitude du périgée, quantités connues, et des longitudes G'_0, G''_0 aux instants des observations.

Dans le système écliptique héliocentrique, les coordonnées rectilignes du centre de la Terre aux instants des observations sont

$$\begin{cases} x' = -\rho' \cos G'_0, \\ y' = -\rho' \sin G'_0, \\ z' = 0 ; \end{cases} \qquad \begin{cases} x'' = -\rho'' \cos G''_0, \\ y'' = -\rho'' \sin G''_0, \\ z'' = 0. \end{cases}$$

Les équations des droites issues de la Terre et passant par la planète à ces instants sont

$$\frac{x - x'}{\cos G' \cos L'} = \frac{y - y'}{\sin G' \cos L'} = \frac{z - z'}{\sin L'},$$

$$\frac{x - x''}{\cos G'' \cos L''} = \frac{y - y''}{\sin G'' \cos L''} = \frac{z - z''}{\sin L''},$$

système de quatre équations à trois inconnues (x, y, z), coordonnées de la planète lors de chacune des observations. On obtiendra ces inconnues en fonction de $x', y', z', x'', y'', z''$; d'où on les tirera en fonction de ρ', ρ'' ; et, enfin, en fonction de la seule indéterminée a.

Ces résultats manquent de précision, car les observations, faites d'un point de la surface terrestre, ont été traitées comme si elles avaient été faites du centre de la Terre. Mais, des coordonnées de la planète que nous venons d'obtenir, nous pouvons déduire en première approximation les distances de la planète au centre de la Terre, calculer les corrections de parallaxe correspondantes, et améliorer nos résultats.

n couples d'observations donneront ainsi, en fonction de a, n positions héliocentriques de la planète. Quelque grand que soit n, on constate que *toutes ces positions appartiennent,* à l'approximation des observations, *à une même ellipse dont le centre du Soleil occupe un des foyers.* C'est la *première loi* du mouvement planétaire.

Les recherches précédentes, laissant a indéterminé, ne fournissent qu'une courbe *homothétique* à l'orbite planétaire. Quelle que soit la planète, l'excentricité de l'ellipse est petite, et faible est l'inclinaison du plan de l'orbite sur l'écliptique.

La projection de chaque planète sur l'écliptique tourne autour du Soleil dans le sens direct (gaucher) par rapport à la direction positive (nord) de l'axe de l'écliptique.

En étudiant la vitesse angulaire de la direction héliocentrique de chaque planète (comme on l'a fait pour la direction géocentrique du Soleil et de la Lune), on découvre la *deuxième loi* du mouvement planétaire : *chaque planète parcourt son orbite conformément à la loi des aires par rapport au Soleil.*

Ensemble des orbites planétaires. — L'approximation actuelle permet la substitution d'une figure à de trop longs calculs. En donnant au demi-grand axe a une valeur arbitraire, construisons une ellipse de même excentricité que l'orbite terrestre : ce sera une image de cette orbite, dont l'échelle ne dépend que de la valeur donnée à a.

En gardant la même valeur a dans les résultats relatifs à toutes les planètes, dessinons des ellipses semblables aux sept orbites planétaires : ce seront des images des orbites planétaires à l'échelle de l'image de l'orbite terrestre.

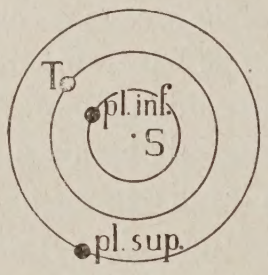

Fig. 27. Écliptique.

L'ensemble de ces figures nous explique la propriété des planètes inférieures d'avoir une digression maximum. En effet, les dimensions des ellipses dessinées montrent que *les orbites des planètes inférieures se projettent sur l'écliptique* (fig. 27) *suivant des courbes intérieures à l'orbite terrestre, tandis que les planètes*

supérieures se projettent suivant des courbes extérieures. La digression maximum d'une planète inférieure est l'angle maximum des deux directions issues du point d'observation, l'une passant par le Soleil, l'autre tangente à l'orbite planétaire. De deux planètes inférieures, la projection écliptique de l'orbite de celle qui a la plus grande digression maximum enveloppe la projection écliptique de l'orbite de l'autre.

Par ordre de distances croissantes au Soleil, les huit planètes principales se rangent comme ceci : 1. *Mercure ;* 2. *Vénus ;* 3. *la Terre ;* 4. *Mars ;* 5. *Jupiter ;* 6. *Saturne ;* 7. *Uranus ;* 8. *Neptune.*

Ceci établi, mesurons les demi-grands axes des ellipses dessinées :

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8.$$

Écrivons encore les durées des révolutions sidérales des planètes correspondantes :

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4,\ S_5,\ S_6,\ S_7,\ S_8,$$

S_3 se confondant avec S_t, année sidérale.

Nous constatons que les carrés des révolutions sidérales de deux planètes quelconques sont entre eux comme les cubes des demi-axes a correspondants :

$$\left(\frac{S_i}{S_j}\right)^2 = \left(\frac{a_i}{a_j}\right)^3, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, 8,$$

ou

$$\frac{a_i^3}{S_i^2} = \text{une constante K}, \qquad i = 1, 2, \ldots 8 ;$$

mais les axes vrais des orbites planétaires sont dans les mêmes rapports que les axes des ellipses réduites ; et il reste vrai de dire que *les carrés des révolutions sidérales de deux planètes quelconques sont entre eux comme les cubes des grands axes de leurs orbites.* C'est la *troisième* loi du mouvement planétaire (1).

---

(1) La troisième loi du mouvement des planètes n'est pas tout à fait exacte : le coefficient de proportionnalité devrait être multiplié par un facteur variant d'une planète à l'autre, mais toujours extrêmement proche de l'unité.

Nous aurons à faire usage de cette loi sous une autre forme, en fonction des *paramètres* des orbites. Appelons paramètre $2p$ le produit $2a(1 - e^2)$ du grand axe par l'excès de l'unité sur le carré de l'excentricité. L'égalité

$$a^3 = KS^2,$$

qui exprime la troisième loi du mouvement, peut s'écrire

$$\frac{\pi^2 a^4 (1 - e^2)}{S^2} \cdot \frac{1}{2a(1 - e^2)} = \frac{\pi^2 K}{2} = \text{constante}.$$

Le premier facteur du premier membre est le carré du rapport

$$\frac{\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{S}$$

dont le numérateur est la surface de l'ellipse, et qui exprime l'aire balayée par le rayon héliocentrique de la planète pendant l'unité de temps, ou la *constante des aires*.

Le second facteur est l'inverse du paramètre de l'orbite.

La troisième loi du mouvement planétaire peut donc se remplacer par la suivante : *les carrés des aires balayées par le rayon vecteur dans l'unité de temps sont proportionnels aux paramètres des orbites.*

Élèments elliptiques. — On appelle *éléments elliptiques* d'une planète des quantités suffisantes à la détermination, par rapport aux étoiles, du plan de son orbite, de cette orbite dans son plan, et de la position de la planète à un instant quelconque.

1° et 2°. Le plan de l'orbite est déterminé par la longitude et la latitude héliocentriques de sa normale.

Les astronomes remplacent habituellement ces deux éléments par la *longitude du nœud ascendant* et l'*inclinaison du plan de l'orbite*.

(1°) Le plan de l'orbite coupe l'écliptique suivant une droite passant par le Soleil et appelée *ligne des nœuds* ; le *nœud ascendant* est la demi-ligne des nœuds suivant laquelle la planète passe de l'hémisphère écliptique sud à l'hémisphère écliptique nord : ainsi, la *longitude du nœud ascendant* fait connaître une droite du plan de l'orbite.

(2°) De la ligne des nœuds sont issus la demi-écliptique qui renferme les directions dont les longitudes sont immédiatement plus grandes que la longitude du nœud ascendant et le demi-plan de l'orbite dans lequel se trouve la planète immédiatement après son passage au nœud ascendant : l'angle du dièdre de ces deux demi-plans, ou *inclinaison de l'orbite*, achève de déterminer le plan de celle-ci.

Quelles relations y a-t-il entre ces deux éléments elliptiques habituels et les coordonnées polaires écliptiques de la normale au plan de l'orbite ? Pour fixer les idées, dirigeons cette normale de manière que la circulation de la planète, vue de cette direction, se fasse dans le sens direct (gaucher) : cette direction fait, pour toutes les planètes connues, un angle aigu avec la direction nord de l'axe de l'écliptique. Alors, la longitude de la normale au plan de l'orbite est égale à la longitude du nœud ascendant diminuée de 90° ; sa latitude est le complément de l'inclinaison de l'orbite.

3° La forme de l'ellipse planétaire est connue par son *excentricité*, et

4° sa grandeur par son *demi-grand axe*.

5° La position de l'orbite dans le plan est fixée par la longitude de l'une des extrémités de son grand axe, le *périhélie* à la moindre distance du Soleil, l'*aphélie* à la plus grande distance ; on donne habituellement la *longitude du périhélie*.

6° La loi des aires, associée à la loi qui lie la révolution sidérale au grand axe de l'orbite, permet de retrouver à un instant quelconque la position de la planète, dès qu'on connaît le rapport du grand axe de celle-ci au grand axe de l'orbite terrestre et l'instant de son passage en un point déterminé, par exemple l'*époque du passage au périhélie*.

Détermination d'une orbite planétaire. — Soient

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$$

les six éléments connus de l'orbite terrestre, et

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$$

les six éléments inconnus d'une autre planète.

A un instant quelconque t, et par rapport à un système quelconque d'axes, les coordonnées x, y, z d'un point terrestre M de longitude λ et de latitude φ sont des fonctions telles que

$$x = \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \lambda, \varphi, t),$$
$$y = \psi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \lambda, \varphi, t),$$
$$z = \theta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \lambda, \varphi, t).$$

Au même instant t, et par rapport au même système d'axes, les coordonnées X, Y, Z du centre P de la planète étudiée sont des fonctions telles que

$$X = \Phi(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, t),$$
$$Y = \Psi(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, t),$$
$$Z = \Theta(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, t).$$

Si α et δ sont les coordonnées polaires de la direction MP, les cosinus directeurs de cette direction sont $\cos\alpha\cos\delta$, $\sin\alpha\cos\delta$, $\sin\delta$, et les équations de la droite MP sont

$$\frac{X - x}{\cos\alpha\cos\delta} = \frac{Y - y}{\sin\alpha\cos\delta} = \frac{Z - z}{\sin\delta}$$

auxquelles satisfont les coordonnées de la planète :

$$\frac{\Phi - \varphi}{\cos\alpha\cos\delta} = \frac{\Psi - \psi}{\sin\alpha\cos\delta} = \frac{\Theta - \theta}{\sin\delta}.$$

Cela étant, supposons qu'à un instant t' un observateur en $M(\lambda, \varphi)$ mesure les coordonnées polaires de la direction MP de la planète, et trouve, après correction de la réfraction et de l'aberration, α' et δ' ; il pourra écrire les deux équations

$$\frac{\Phi(t') - \varphi(t')}{\cos\alpha'\cos\delta'} = \frac{\Psi(t') - \psi(t')}{\sin\alpha'\cos\delta'} = \frac{\Theta(t') - \theta(t')}{\sin\delta'}.$$

S'il recommence les mêmes observations et les mêmes réductions à un instant t'', pour obtenir α'' et δ'', puis à un instant t''' pour obtenir α''' et δ''', il pourra écrire encore :

$$\frac{\Phi(t'') - \varphi(t'')}{\cos\alpha''\cos\delta''} = \frac{\Psi(t'') - \psi(t'')}{\sin\alpha''\cos\delta''} = \frac{\Theta(t'') - \theta(t'')}{\sin\delta''},$$

$$\frac{\Phi(t''') - \varphi(t''')}{\cos\alpha'''\cos\delta'''} = \frac{\Psi(t''') - \psi(t''')}{\sin\alpha'''\cos\delta'''} = \frac{\Theta(t''') - \theta(t''')}{\sin\delta'''}.$$

On aura ainsi obtenu un système de six équations à six inconnues $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$. L'orbite planétaire sera donc, en principe, déterminée.

Mais les équations ci-dessus sont transcendantes et extrêmement compliquées ; on ne peut donc les résoudre que par approximations successives ou par des artifices équivalents. Les diverses méthodes de détermination des orbites planétaires se distinguent par la mise en œuvre, plus ou moins avantageuse, de ces artifices.

L'essentiel, ici, est d'avoir constaté que trois observations (convenablement espacées) d'une planète suffisent au calcul de ses éléments.

Il reste à expliquer comment on tient compte d'observations dont le nombre est supérieur à 3. Soient n le nombre des observations,

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$$

les éléments de l'orbite déterminés au moyen de trois d'entre elles, et

$$a_1 + \Delta a_1,\ a_2 + \Delta a_2,\ a_3 + \Delta a_3,\ a_4 + \Delta a_4,\ a_5 + \Delta a_5,\ a_6 + \Delta a_6$$

des valeurs meilleures des éléments cherchés.

Chaque observation permettant d'écrire deux équations entre ces éléments, à l'ensemble actuel d'observations correspond un système de $2n$ équations de la forme

$$F_i(a_1 + \Delta a_1,\ a_2 + \Delta a_2,\ \dots\ a_6 + \Delta a_6) = 0, \quad i = 1, 2, \dots 2n.$$

Le développement en série de chacune d'elles, suivant les puissances croissantes des corrections $\Delta a_1, \Delta a_2, \dots \Delta a_6$, et limité aux termes du premier degré, les transforme dans

$$F_i(a_1, a_2, \dots a_6) + \Delta a_1\left(\frac{dF_i}{da_1}\right)_0 + \Delta a_2\left(\frac{dF}{da_2}\right)_0 + \dots + \Delta a_6\left(\frac{dF_i}{da_6}\right)_0 = 0,$$

système de $2n$ équations linéaires en $\Delta a_1, \Delta a_2, \dots \Delta a_6$, que l'on traitera par l'une des méthodes de la théorie des erreurs.

Résultats. — Les tableaux ci-dessous donnent, pour chaque planète, les cinq éléments géométriques de son orbite et la durée de sa révolution sidérale (au 1er janvier 1900).

Longitude du nœud ascendant

Mercure	47°	8′	41″	Jupiter	99°	26′	36″
Vénus	75	47	17	Saturne	112	47	26
Terre	0	0	0	Uranus	73	28	38
Mars	48	47	12	Neptune	130	40	53

Inclinaison sur l'écliptique

Mercure	7°	0′	11″	Jupiter	1°	18′	31″
Vénus	3	23	37	Saturne	2	29	33
Terre	0	0	0	Uranus	0	46	21
Mars	1	51	1	Neptune	1	46	45

Excentricité

Mercure	0,20561	(1 : 5)	Jupiter	0,04833	(1 : 20)
Vénus	0,00682	(1 : 440)	Saturne	0,05589	(1 : 18)
Terre	0,01675	(1 : 60)	Uranus	0,04634	(1 : 22)
Mars	0,09331	(1 : 11)	Neptune	0,00900	(1 : 111)

Rapport du grand axe au grand axe de l'orbite terrestre

Mercure	0.387	Jupiter	5,203
Vénus	0,723	Saturne	9,555
Terre	1,000	Uranus	19,218
Mars	1,524	Neptune	30,110

Longitude du périhélie

Mercure	73°	53′	50″	Jupiter	12°	43′	16″
Vénus	130	8	26	Saturne	91	5	54
Terre	101	13	7	Uranus	171	32	55
Mars	334	13	6	Neptune	46	43	39

Révolution sidérale (en jours moyens)

Mercure	87,969	Jupiter	4 332,589
Vénus	224,701	Saturne	10 759,23
Terre	365,256	Uranus	30 688,45
Mars	676,980	Neptune	60 181,3

Distances à la Terre. — Abstraction faite de l'excentricité et de l'inclinaison des orbites, les distances extrêmes d'une planète à la Terre sont $(\rho + R)$ et la valeur absolue de $(\rho - R)$, où ρ et R sont les distances moyennes de la Terre et de la planète au Soleil.

Voici le tableau de ces distances extrêmes, avec $\rho = 1$, et les rapports de ces distances :

	Dist. max.	*Dist. min.*	*Rapport*
Mercure	1,39	0,61	2,26
Vénus	1,72	0,28	6,22
Mars	2,52	0,52	4,82
Jupiter	6,20	4,20	1,48
Saturne	10,54	8,54	1,23
Uranus	20,18	18,18	1,11
Neptune	31,06	29,06	1,07

Remarque. — Après avoir établi le mouvement elliptique du Soleil autour de la Terre, nous avons résolu sur ce mouvement un certain nombre de problèmes (n° 52) : vitesse linéaire de l'astre, instant défini par l'une de ses coordonnées polaires, coordonnées de l'astre à un instant donné ; nous avons introduit l'anomalie vraie, l'anomalie moyenne, l'anomalie excentrique, liées par une équation connue. Ces problèmes et ces définitions s'appliquent aussi bien au mouvement d'une planète autour du Soleil, lorsque le plan de l'orbite est déterminé. L'excentricité de chacune des orbites planétaires est assez petite pour assurer la convergence du développement en série qui exprime l'anomalie excentrique en fonction de l'anomalie moyenne.

87. EXPLICATION DU MOUVEMENT APPARENT DES PLANÈTES

Moyen mouvement. — Le *moyen mouvement en longitude* d'une planète est l'angle que décrirait, en un jour moyen, une demi-droite issue du centre du Soleil et qui parcourrait toute l'écliptique d'un mouvement uniforme, en un temps égal à la durée de la révolution sidérale de la planète.

Soient a' et a'' les demi-grands axes des orbites de deux planètes, S′ et S″ les durées de leurs révolutions sidérales, B′ et B″ leurs moyens mouvements en longitude ; en vertu de la troisième loi du mouvement planétaire

$$\frac{S'^2}{S''^2} = \frac{a'^3}{a''^3},$$

et, par définition du moyen mouvement,

$$\frac{B'}{B''} = \frac{S''}{S'};$$

d'où

$$\frac{B'}{B''} = \sqrt{\left(\frac{a''}{a'}\right)^3}.$$

Supposons a' moindre que a'' ; nous aurons :

$$\frac{B'}{B''} > \frac{a''}{a'}, \quad \text{ou} \quad B''a'' < B'a' ;$$

le produit du moyen mouvement en longitude par le grand axe de l'orbite décroît d'une planète à toute autre planète plus éloignée du Soleil ; ou bien, les moyens mouvements décroissent plus rapidement que ne croissent les distances au Soleil.

Cela étant, cherchons à nous rendre compte des élongations et des rétrogradations observées dans le mouvement apparent des planètes. Pour simplifier cette étude, admettons que les trajectoires planétaires décrivent dans l'écliptique, d'un mouvement

uniforme, des circonférences centrées sur le Soleil ; la petitesse de l'excentricité et de l'inclinaison de l'orbite rend cette hypothèse acceptable.

Étude géométrique. — Prenons comme plan de la figure (fig. 28 ou 29) le plan de l'écliptique vu du nord. Soient, à un même instant, S le centre du Soleil, T le centre de la Terre, P le centre de la planète, ρ le rayon de l'orbite terrestre, R le rayon de l'orbite planétaire.

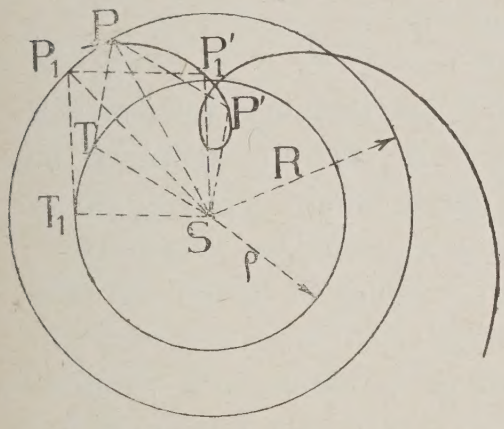

FIG. 28. — Trajectoire géocentrique d'une planète supérieure (Mars) dans le plan de l'écliptique (vu du nord). Les configurations T P P', T_1 P_1 P'_1 de l'ensemble [Terre - planète - planète apparente] sont dessinées pour un intervalle de 30 jours : $T T_1 = 30\beta\rho$, $P P_1 = 30BR$.

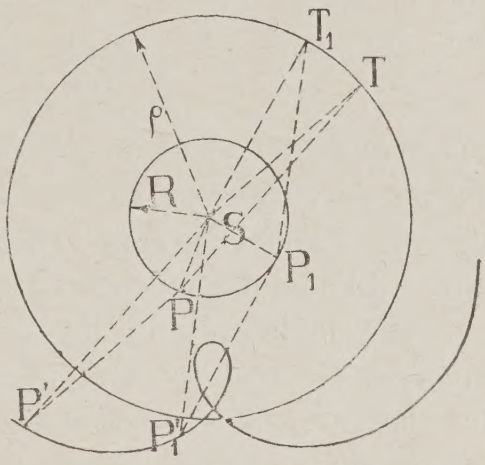

FIG. 29. — Trajectoire géocentrique d'une planète inférieure (Mercure) dans le plan de l'écliptique (vu du nord). Les configurations T P P', $T_1P_1P'_1$ de l'ensemble [Terre-planète-planète apparente] sont dessinées pour un intervalle de 20 jours : $T T_1 = 20\beta\rho$, $P P_1 = 20BR$.

Pour nous représenter de quelle manière on observe, du point T, le déplacement du point P, nous devons mener par un point fixe, S par exemple, des vecteurs SP' équipollents aux vecteurs TP : le lieu des points P' est la trajectoire apparente du point P pour le point T considéré comme immobile. La distance PP' est constante et égale à ρ : le point P' est donc un point d'une circonférence de rayon ρ qui tourne autour de son centre et dont le centre décrit la circonférence de rayon R. En un jour moyen, par

exemple, la droite PP′ tourne d'un angle égal au moyen mouvement terrestre β, et le point P décrit un arc mesuré par RB.

Le point P′ est donc lié à un cercle de centre mobile P et de rayon x qui roulerait sur la circonférence de centre S et de rayon $(R - x)$ ou $(x - R)$ suivant que la planète est supérieure ou inférieure, la valeur de x étant, pour qu'il n'y ait pas glissement, telle que

$$x\beta = (R - x)B \quad \text{ou} \quad x\beta = (x - R)B,$$

d'où

$$x = R\frac{B}{B + \beta} \quad \text{ou} \quad R\frac{B}{B - \beta}$$

respectivement. La planète apparente P′ décrit donc *une épicycloïde allongée ou raccourcie suivant que la planète est supérieure ou inférieure.* Dans le premier cas, le cercle mobile n'atteint pas le centre ; il l'englobe, au contraire, dans le second cas. Dans chaque cas l'épicycloïde présente des points doubles et admet des tangentes issues du point S. Ces tangentes divisent le plan en secteurs : dans chaque secteur qui renferme un point double, le mouvement apparent de la planète est rétrograde ; il est direct dans les autres secteurs ; les stations sont les instants des passages aux points de contact.

Étude analytique. — Reprenons les hypothèses simplificatrices et les notations ci-dessus : S, T et P, ρ et R, β et B (fig. 30). Soient,

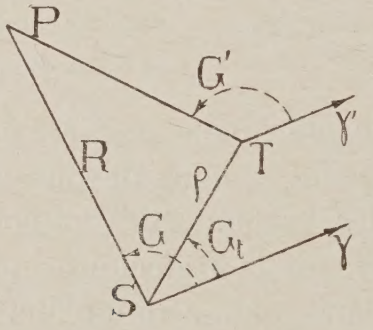

Fig. 30. — Plan de l'écliptique (vu du nord).

de plus : γ le rayon vernal héliocentrique ; γ′, parallèle et de même sens, le rayon vernal géocentrique ; G_t et G les longitudes héliocen-

triques de T et P respectivement ; G′ la longitude géocentrique de P.

Si α et A sont les longitudes héliocentriques de la Terre et de la planète à l'instant initial, on a, à l'instant t,

$$G_t = \alpha + \beta t,$$
$$G = A + Bt ;$$

et, au même instant, les coordonnées écliptiques héliocentriques de la Terre sont :

$$\xi = \rho \cos(\alpha + \beta t),$$
$$\eta = \rho \sin(\alpha + \beta t),$$
$$\zeta = 0 ;$$

et de la planète :

$$X = R \cos(A + Bt),$$
$$Y = R \sin(A + Bt),$$
$$Z = 0.$$

Les équations de la courbe décrite par la planète par rapport à des axes écliptiques géocentriques X′Y′Z′ s'obtiennent en remplaçant

$$X \text{ par } X' + \xi,$$
$$Y \text{ » } Y' + \eta,$$
$$Z \text{ » } Z' + \zeta,$$

et sont par conséquent

$$X' = R \cos(A + Bt) - \rho \cos(\alpha + \beta t),$$
$$Y' = R \sin(A + Bt) - \rho \sin(\alpha + \beta t),$$
$$Z' = 0,$$

équations paramétriques de l'épicycloïde allongée ou raccourcie découverte dans l'étude géométrique.

La direction géocentrique de la planète a donc une longitude céleste géocentrique G′ telle que, à chaque instant,

$$\operatorname{tg} G' = \frac{Y'}{X'} = \frac{R \sin(A + Bt) - \rho \sin(\alpha + \beta t)}{R \cos(A + Bt) - \rho \cos(\alpha + \beta t)}.$$

Pour reconnaître les particularités du mouvement angulaire de la planète par rapport à la Terre et, en particulier, la vitesse angulaire, calculons $\frac{dG'}{dt}$; à un facteur positif près, nous trouvons :

$$BR^2 + \beta\rho^2 - (B + \rho)R\rho \cdot \cos [A - \alpha + (B - \beta)t].$$

Le mouvement apparent de la planète est une élongation, une station ou une rétrogradation suivant que cette fonction du temps est positive, nulle ou négative. En particulier, il y a station chaque fois que

$$\cos [A - \alpha + (B - \beta)t] = \frac{BR^2 + \beta\rho^2}{(B + \beta)R\rho}.$$

Pour que cette équation en t ait des racines réelles, il faut et il suffit que son second membre ne surpasse pas l'unité, ou que l'on ait

$$(BR - \beta\rho)(R - \rho) \leqslant 0,$$

c'est-à-dire

$$BR - \beta\rho \leqslant 0 \quad \text{ou} \quad BR - \beta\rho \geqslant 0$$

suivant que la planète est supérieure ($R > \rho$) ou inférieure ($R < \rho$). Nous savons que cette condition est toujours vérifiée.

Si μ est un angle dont le cosinus est égal à

$$\frac{BR^2 + \beta\rho^2}{(B + \beta)R\rho},$$

il y aura station de la planète à chacun des instants

$$t = \frac{360^\circ \times k \pm \mu - (A - \alpha)}{B - \beta},$$

où k prend toutes les valeurs entières, positives et négatives, y compris zéro.

En adoptant la valeur de μ comprise entre 0 et 90°, les durées moyennes d'une rétrogradation et d'une élongation sont respectivement

$$\frac{2\mu}{b} \quad \text{et} \quad \frac{360^\circ - 2\mu}{b}$$

où b est égal à $(B - \beta)$ ou $(\beta - B)$ suivant que la planète est inférieure ou supérieure.

La durée totale en jours moyens

$$\frac{360^\circ}{b}$$

d'une élongation et d'une rétrogradation est la période au bout de laquelle la Terre et la planète retrouvent la même différence entre leurs longitudes héliocentriques ; la période de ces phénomènes est donc le temps nécessaire à la différence des longitudes de la Terre et de la planète pour augmenter de 360° : c'est la *révolution synodique* de la planète.

Rien ne serait essentiellement changé à cette étude de mouvement relatif si on tenait compte de l'excentricité de l'orbite planétaire et de l'obliquité de son plan sur l'écliptique.

Appliqués à chaque planète, les calculs ci-dessus conduisent aux résultats suivants, avec le moyen mouvement de la Terre égal à 3548″, et les durées exprimées en jours moyens.

	Révolution synodique	*Moyen mouvement*	*Rétrogradation (durée moyenne)*	*Élongation (durée moy.)*
Mercure	116^j	14 732″	23^j	93^j
Vénus	584	5 768	42	542
Mars	780	1 887	73	707
Jupiter	399	299	121	278
Saturne	378	120	139	239
Uranus	370	42	151	219
Neptune	367	22	158	210

88. PASSAGES DES PLANÈTES INFÉRIEURES SUR LE SOLEIL

Si la révolution de Vénus s'effectuait dans le plan de l'écliptique, cette planète passerait sur la droite qui joint le centre de la Terre au centre du Soleil tous les 584 jours, durée de sa révolution synodique : il y aurait, à chaque conjonction inférieure, éclipse annulaire du Soleil par Vénus.

Mais le plan de l'orbite de Vénus est incliné sur l'écliptique, et ces éclipses ne se produisent que lors des conjonctions inférieures où Vénus passe assez près de la ligne des nœuds de son orbite. Cette réunion de circonstances favorables se réalise rarement : les passages de Vénus sur le Soleil sont séparés par des intervalles de 8, 105, 8, 122, 8, 105, 8... années ; ils ont lieu soit en juin (voisinage du nœud descendant), soit en décembre (voisinage du nœud ascendant) ; voici les dates des quatre derniers et des quatre prochains :

juin	1761,	juin	2004,
juin	1769,	juin	2012,
décembre	1874,	décembre	2117,
décembre	1882,	décembre	2125.

Le même raisonnement s'applique à Mercure ; ses passages sur le Soleil ont lieu soit en mai (voisinage du nœud descendant), soit en novembre (voisinage du nœud ascendant) :

mai	1891,	mai	1924,
novembre	1894,	novembre	1927,
novembre	1907,	mai	1937,
novembre	1914,	novembre	1940.

89. GRANDEUR ET ROTATION DES PLANÈTES. PARTICULARITÉS DIVERSES

Éclat. — Les planètes sont, comme la Lune, des astres sans lumière propre, et qui ne nous envoient que de la lumière solaire réfléchie.

L'*albedo* d'une surface réfléchissante est le rapport de la quantité de lumière qu'elle réfléchit à la quantité de lumière qu'elle reçoit.

Les *mesures photométriques* fournissent, pour les albedos de la Lune et des planètes, les résultats suivants :

Lune	0,15	Jupiter	0,72
Mercure	0,16	Saturne	0,84
Vénus	0,88	Uranus	0,70
Mars	0,26	Neptune	0,61

Rapprochés des diamètres des planètes, ces nombres permettent le calcul de leur éclat intrinsèque. Rapprochés, de plus, des distances à la Terre, ils permettent le calcul de l'éclat des planètes pour l'observateur terrestre. Ainsi la Lune a un éclat total égal à 1 : 600 000 de celui du Soleil.

Phases. — Pour un observateur terrestre, la partie lumineuse visible d'une planète est le fuseau commun à l'hémisphère tourné vers le Soleil et à l'hémisphère tourné vers la Terre ; elle dépend ainsi de la position relative des trois astres, et il en résulte des phases analogues aux phases de la Lune.

Les phases des planètes inférieures sont complètes : leur partie éclairée et visible va de zéro à un hémisphère. Ces phases extrêmes se réalisent lorsque la planète et le Soleil ont même longitude géocentrique (sont en conjonction), la première quand la planète est en deça du Soleil (conjonction inférieure), la seconde quand la planète est au delà du Soleil (conjonction supérieure).

Les planètes supérieures ne s'éteignent jamais complètement. Les phases de Mars, déjà, sont peu marquées : le disque apparent est toujours presque complet, et l'éclat de la planète ne peut être réduit qu'à ses neuf dixièmes.

Les phases des autres planètes supérieures sont insensibles.

Grandeur. — Le diamètre des globes planétaires se déduit de leur distance à la Terre et de leur grandeur apparente pour l'observateur terrestre.

Diamètre des planètes

	Diam. app. minimum	*Diam. app. moyen*	*Diam. app. maximum*	*Diam. en diam. terr.*	*Diam. en kilom.*
Mercure	4″,7	6″,7	10″,7	0,38	4 846
Vénus	10 ,2	16 ,8	63 ,5	0,95	12 116
Mars	3 ,7	6 ,1	17 ,7	0,53	6 760
Jupiter	31 ,4	37 ,9	46 ,3	11,19	142 719
Saturne	15 ,5	17 ,4	19 ,2	9,47	120 780
Uranus	3 ,7	3 ,6	4 ,1	3,90	49 740
Neptune	2 ,3	2 ,4	2 ,5	4,15	52 930

Étude de la surface. Rotation. Aplatissement.

Mercure. — L'étude de la surface de Mercure a été pauvre en résultats. Le netteté de son disque noir lors de ses passages sur le Soleil et son faible albedo, voisin de l'albedo lunaire, démontrent que cette planète ne possède pas d'atmosphère. Les taches aperçues à sa surface sont extrêmement vagues et difficiles à suivre, au point que les astronomes ne sont pas du tout d'accord sur la durée de sa rotation. Les uns sont partisans d'une rotation lente dont la durée serait celle de la révolution sidérale de la planète, 88 jours, ce qui maintiendrait constamment le même hémisphère tourné vers le Soleil. Les autres soutiennent l'opinion d'une rotation rapide, d'une durée voisine de 24 heures. Cette question est liée jusqu'à un certain point à celle de la rotation de Vénus.

Vénus. — On est certain d'une atmosphère dense à la surface de Vénus ; sa densité serait à peu près double de la densité de l'atmosphère terrestre.

L'existence de cette atmosphère est prouvée :

1° par l'albedo considérable de la planète, supérieur à celui de toutes les substances terrestres solides, et qui ne peut être dû qu'à une enveloppe de nuages ;

2° par une ligne brillante qui, dans les passages de Vénus sur le Soleil, pendant l'immersion et l'émersion, entoure la partie du disque de la planète encore (ou déjà) hors du disque solaire ;

3° par la lumière qui émane de la partie obscure de la planète lorsque sa partie lumineuse visible est réduite à un mince croissant, lumière dite secondaire dont l'explication ne peut être celle de la lumière cendrée de la Lune ;

4° par l'allongement des cornes du croissant, peu de temps avant ou après les conjonctions inférieures, au delà d'un diamètre de la planète, de manière à étendre le bord lumineux sur plus d'une demi-circonférence : ce phénomène, dû à la réfraction de l'atmosphère, a permis la mesure approximative de la densité de celle-ci.

Les taches que présente la surface de Vénus sont très vagues et très fugitives ; sans doute sont elles dues à des modifications

temporaires des hautes couches nuageuses de l'atmosphère. L'étude de quelques taches qui semblaient permanentes a été entreprise en vue de la détermination de la période de rotation ; elle a, comme pour Mercure, divisé les astronomes en partisans d'une rotation lente, d'une durée égale à celle de la révolution sidérale (225 j.), et en partisans d'une rotation rapide, d'une durée voisine de 24 h. Mais il faut signaler la découverte de taches très brillantes, aux extrémités d'un même diamètre, et qui seraient des accumulations de neige dans le voisinage des pôles ; avec cette interprétation, les *taches polaires* excluent la possibilité de la rotation lente et déterminent l'axe de rotation de la planète.

L'*axe de rotation* est, par définition, dirigé de manière que la rotation s'effectue dans le sens direct pour un observateur appartenant à sa partie positive.

L'*inclinaison de l'équateur planétaire* sur le plan de l'orbite est mesurée par l'angle que fait l'axe de rotation avec la partie nord de la perpendiculaire au plan de l'orbite.

La position des taches polaires fait attribuer une valeur de 12° à l'inclinaison de l'équateur sur le plan de l'orbite. Les saisons de Vénus sont donc moins accentuées que les saisons terrestres. A leur succession correspondent des extensions et des régressions des taches polaires.

Vénus présente un faible aplatissement, évalué à (1 : 300).

Mars. — La surface de Mars présente des taches parfaitement stables et des taches polaires brillantes qui ont permis une détermination précise des éléments de sa rotation : la durée de celle-ci est de

$$24^{h}\,37^{m}\,23^{s},$$

et son équateur est incliné de

$$23°30'$$

sur le plan de son orbite.

L'atmosphère de Mars paraît analogue à l'atmosphère terrestre. Ceci résulte de la valeur de l'albedo et de l'étude des extensions

et des régressions des calottes polaires neigeuses ; ces phénomènes sont très marqués, ce qui résulte de la forte obliquité de l'équateur martien sur le plan de l'orbite. Lors de leurs régressions, les calottes polaires s'entourent d'une bande bleue qui nous renvoie de la lumière polarisée : c'est une zone liquide due à la fonte des glaces polaires.

Les particularités de la surface de Mars ont été l'objet d'études longues et multiples. Les taches sombres, grandes et petites, ont été figurées sur des cartes. Beaucoup d'astronomes voient ces taches réunies par des lignes sombres, menées suivant des grands cercles de la planète, et extrêmement nombreuses. Ces figures leur ont paru révéler l'activité d'habitants de Mars : les lignes sombres seraient des vallées fertiles bordant des *canaux* creusés de manière à réunir les *mers* martiennes, et dont les intersections seraient entourées d'*oasis*. Les mers, les oasis, les canaux ont reçu des noms, et on a compté et figuré sur les cartes jusque 420 canaux. A certaines époques quelques canaux ont paru dédoublés.

Mais plusieurs astronomes soutiennent que l'apparence des canaux constitue une illusion d'optique, et qu'à la limite de visibilité, l'observateur réunit inconsciemment par un tracé rectiligne de petites taches isolées distribuées à peu près dans une même direction. Des expériences ont été faites qui confirment cette opinion. Cependant les canaux de Mars apparaissent sur les photographies de la planète ; mais les partisans de l'illusion attribuent ces aspects à des phénomènes de diffraction.

Mars présente un aplatissement sensible, exprimé par (1 : 105).

Jupiter. — Nous verrons que la densité moyenne de Jupiter est voisine de l'unité ; et il est vraisemblable que cette planète est, dans sa plus grande partie, à l'état liquide. De plus, la grandeur de son albedo lui fait attribuer une atmosphère dense.

La planète présente deux larges bandes sombres, symétriques par rapport à l'équateur jovien, et dont la couleur, la largeur et la latitude sont légèrement variables ; elles comprennent une zone équatoriale brillante.

La bande sombre méridionale est échancrée à son bord sud par une longue baie brillante dont la partie centrale est occupée par un objet remarquable auquel on a donné le nom de *grande tache rouge*. C'est une formation ovale dont le grand axe est parallèle à l'équateur ; sa coloration est rouge brun ; ses dimensions et sa latitude sont presque invariables ; mais sa longitude subit de petites oscillations, comme l'indiquent les variations de la durée de sa rotation.

Un grand nombre d'autres taches obscures et brillantes, distribuées à toutes les latitudes, ont permis une étude fructueuse de la rotation de Jupiter. Les objets suivis dans leurs mouvements n'ont pas tous une même vitesse de rotation ; ces mouvements décèlent huit grands *courants* dont les déplacements s'effectuent autour d'un axe commun, dans le sens direct, autour d'un axe incliné de 3°6′ sur le plan de l'orbite. Le courant le plus rapide comprend l'équateur de la planète : sa durée de rotation est de

$$9^h\,50^m\,20^s\ ;$$

les courants voisins des pôles mettent environ 5^m de plus à accomplir une révolution complète.

L'aplatissement de Jupiter est considérable, et mesuré par le rapport (1 : 15).

Saturne et ses anneaux. — Trois anneaux circulaires relativement plats, situés dans le même plan et à très peu près concentriques à la planète, rendent l'aspect de Saturne extrêmement remarquable. Le plan des anneaux est incliné de 26°45′ sur le plan de l'orbite et se confond avec le plan équatorial de la planète. Les deux anneaux extérieurs sont brillants et séparés par un mince intervalle. L'anneau intérieur est transparent, d'une coloration bleu sombre, et continue sans interruption l'anneau médian. Voici, en rayons équatoriaux de la planète, les rayons des bords des trois anneaux :

anneau nébuleux, bord intérieur	1,21
anneau nébuleux, bord extérieur 1er anneau brillant, bord intérieur	1,48
1er anneau brillant, bord extérieur	1,92
2me anneau brillant, bord intérieur	1,96
2me anneau brillant, bord extérieur	2,23.

Les anneaux de Saturne sont invisibles pour l'observateur terrestre lorsque, des deux demi-espaces que leur plan détermine, l'un renferme le Soleil, l'autre l'observateur terrestre.

On fait cette hypothèse, confirmée par les conditions d'équilibre des anneaux, que ceux-ci sont formés de particules solides séparées par des intervalles très grands relativement à leurs dimensions.

Saturne présente une zone équatoriale brillante, bordée de deux bandes sombres, dont l'éclat diminue jusqu'aux calottes polaires.

Les irrégularités de la surface décèlent la rotation de la planète, un peu variable avec la latitude ; des observations récentes donnent

$$10^h\,38^m$$

pour durée de la rotation équatoriale, autour d'un axe incliné de 26°45′ sur la perpendiculaire nord au plan de l'orbite.

Saturne est la planète qui présente le plus grand aplatissement : (1 : 10) environ.

Uranus. — L'éloignement d'Uranus rend très pénible l'étude physique de cette planète. Son aplatissement ne fait pas de doute et est évalué à (1 : 20). Des taches ont pu être suivies au moyen desquelles on s'est assuré d'un mouvement rapide de rotation en 10^h environ ; mais cette rotation, projetée sur le plan de l'orbite, s'effectue dans le sens rétrograde, de manière que l'inclinaison du plan de l'orbite est supérieure à 90°. On n'a pas pu faire jusqu'ici de mesure un peu précise de cette inclinaison.

Neptune. — Circulant aux confins du monde solaire connu, Neptune nous échappe presque entièrement. On sait seulement que sa rotation est, comme celle d'Uranus, rétrograde.

Le tableau suivant reproduit les renseignements numériques qui viennent d'être rencontrés.

	Durée de la rotation	*Obliquité de l'équateur*	*Aplatissement*
Mercure	env. 24^h	?	?
Vénus	env. 24^h	12^o	1 : 300
Mars	$24^h\,37^m\,23^s$	$27^o17'$	1 : 105
Jupiter	$9^h\,50^m\,20^s$	$3^o6'$	1 : 15
Saturne	$10^h\,38^m$	$25^o42'$	1 : 10
Uranus	10^h	$> 90^o$	1 : 20
Neptune	?	$> 90^o$	?

90. LES PETITES PLANÈTES

Découverte et classification. — Entre les orbites de Mars et de Jupiter circulent, conformément aux lois du mouvement planétaire, un grand nombre de petits astres généralement invisibles à l'œil nu : ce sont les *petites planètes, planètes télescopiques* ou *astéroïdes.*

On connaît aujourd'hui environ 900 petites planètes, et leur nombre s'accroît chaque année. Pour les découvrir, on photographie telle région zodiacale du ciel au moyen d'un appareil monté équatorialement et à mouvement diurne : sur le cliché, aux étoiles correspondent des points, tandis qu'un trait décèle la présence d'un astre à mouvement propre, d'une planète.

L'excentricité des orbites des petites planètes est souvent assez forte, et va jusque 0,35 ; l'inclinaison du plan de l'orbite sur le plan de l'écliptique est parfois grande, proche de 35^o ; mais, projetées sur l'écliptique, toutes les révolutions s'effectuent dans le sens direct : leurs durées sont comprises entre 3,02 (Mars, 1,9) et 8,80 ans (Jupiter, 10,9) ; avec le rayon moyen de l'orbite terrestre pour unité, les rayons moyens des orbites correspondantes sont 1,94 (Mars, 2,52) et 4,26 (Jupiter, 5,20).

D'après leurs distances au Soleil, les astéroïdes se répartissent en trois groupes séparés par des lacunes sans orbites : un groupe voisin de l'orbite de Mars, ou *groupe martien* (une centaine de planètes), un groupe central, ou *groupe principal* (le plus nombreux), et un groupe voisin de l'orbite de Jupiter, ou *groupe jovien* (une vingtaine d'astres). Il est vraisemblable, à cause de leur plus grand éloignement, qu'il reste à découvrir relativement plus d'astéroïdes dans le groupe jovien que dans le groupe martien.

Éclat et dimensions. — La constitution superficielle des petites planètes varie de l'un à l'autre de ces astres, comme le montrent les albedos des quatre principaux, les seuls dont on ait pu obtenir le diamètre avec une certaine précision :

	Diamètre	*Albedo*
Cérès	767 km	0,172
Pallas	489	0,225
Junon	193	0,428
Vesta	386	0,709

On se fait une idée de la grandeur des autres astéroïdes en leur attribuant un albedo égal à la moyenne de ceux de Mars et de Mercure, voisin de l'albedo de Pallas. Cette hypothèse conduit à des diamètres qui descendent jusque 10 km. ; mais l'application de la même méthode aux astéroïdes dont les dimensions sont connues montre que l'erreur commise peut atteindre 100 %.

La base de ces calculs est du reste incertaine d'un autre point de vue, car beaucoup d'astéroïdes manifestent d'importantes variations d'éclat, comme si leur rotation présentait au Soleil des régions d'albedos très différents ; cependant, les variations ne sont pas assez régulières pour que cette explication soit suffisante.

Petite planète intramartienne, Éros. — La petite planète Éros n'appartient pas à l'anneau des astéroïdes proprement dits, car sa distance moyenne au Soleil, 1,46, inférieure à celle de Mars, lui fait parcourir la plus grande partie de sa trajectoire à l'inté-

rieur de celle de cette planète. Mais l'excentricité de son orbite, 0,21, est assez grande pour que les projections de ces courbes sur l'écliptique aient deux points d'intersection presque diamétralement opposés.

Éros et la Terre peuvent se rapprocher aux 0,12 du rayon moyen de l'orbite terrestre.

Le plan de l'orbite d'Éros est incliné de 9°57′ sur le plan de l'écliptique.

D'après son éclat, comparé à l'éclat moyen de Mars et de Mercure, le diamètre d'Éros serait d'une trentaine de kilomètres.

Petites planètes transjoviennes. — Les petites planètes n° 588 et n° 624 ont des distances moyennes au Soleil légèrement supérieures au rayon moyen de l'orbite de Jupiter :

Jupiter : 5,20 ; n° 588 : 5,24 ; n° 624 : 5,27.

De plus, trois petites planètes ont des valeurs du même élément fort voisines de celles-ci : les planètes n° 617 et n° 659, à la distance 5,18, et la planète 1917 C Q qui n'a pas encore reçu un numéro d'ordre définitif.

Lois empiriques des distances des planètes au Soleil. — On a cherché des lois empiriques exprimant la distance moyenne a_n de chaque planète au Soleil en fonction de son numéro d'ordre n.

1. La *loi de Bode* est exprimée par la formule

$$a_1 = 0{,}4, \quad \text{puis } a_n = 0{,}4 + 0{,}3 \times 2^{n-2}, \ (n > 1),$$

où l'unité de longueur est le rayon moyen de l'orbite terrestre.

2. La *loi de Belot* est exprimée par la formule

$$a_n = 0{,}28 + \frac{1{,}883^n}{214{,}45}$$

avec la même unité. Les valeurs de n ne se succèdent pas d'unité en unité, ce qui peut s'interpréter par l'hypothèse de planètes non observées remplacées par des anneaux de matière cosmique.

Voici les résultats des calculs effectués sur ces deux formules :

	Bode		*Belot*		Valeurs exactes de a_n
Mercure	$n = 1$	$a_n = 0{,}4$	$n = 5$	$a_n = 0{,}39$	0,39
Vénus	2	0,7	7	0,67	0,72
Terre	3	1,0	8	1,02	1,00
Mars	4	1,6	9	1,67	1,52
Petites planètes	5	2,8	10	2,89	2,95
Jupiter	6	5,2	11	5,20	5,20
Saturne	7	10,0	12	9,55	9,54
Uranus	8	19,6	13	(17,73)	19,18
Neptune	9	38,8	14	(33,18)	30,06

L'auteur de la deuxième loi déclare que celle-ci n'est pas applicable aux planètes Uranus et Neptune dont la circulation est rétrograde.

Orbite circulaire provisoire d'une petite planète. — Lorsqu'une nouvelle planète est découverte, on calcule aussitôt que possible les éléments provisoires de son orbite. Dans ce calcul provisoire, on commence souvent par attribuer à la planète une orbite circulaire. C'est ce que nous allons faire. Nous suivrons exactement le procédé général dont le principe a été donné plus haut.

L'excentricité de l'orbite étant nulle, et le périhélie ayant disparu, les éléments cherchés se réduisent à quatre :

la longitude et la latitude de la normale à l'orbite ;

la grandeur a du demi-grand axe ;

l'époque τ du passage au nœud ascendant ;

et deux observations suffisent à leur détermination.

Soient (ξ, η, ζ) les coordonnées écliptiques héliocentriques de l'observateur, (x, y, z) les coordonnées de la planète, (α, β, γ) les cosinus directeurs de la droite allant de l'observateur à la planète, ρ la distance de l'observateur à la planète ; et affectons

ces quantités d'indices 1 et 2, pour la première et pour la deuxième des observations :

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 + \alpha_1\rho_1, & x_2 &= \xi_2 + \alpha_2\rho_2, \\ y_1 &= \eta_1 + \beta_1\rho_1, & y_2 &= \eta_2 + \beta_2\rho_2, \\ z_1 &= \zeta_1 + \gamma_1\rho_1, & z_2 &= \zeta_2 + \gamma_2\rho_2. \end{aligned}$$

De l'instant t_1 de la première observation à l'instant t_2 de la deuxième, la direction planétaire héliocentrique s'est déplacée d'un angle ayant pour cosinus

$$\frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{a^2},$$

et l'élimination de x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 au profit des seules inconnues ρ_1 et ρ_2 en fait une expression de la forme

$$\frac{A + B_1\rho_1 + B_2\rho_2 + C\rho_1\rho_2}{a^2}.$$

Si S est la durée d'une révolution sidérale de la planète,

$$\frac{S}{2\pi} = \frac{t_2 - t_1}{\arccos \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{a^2}},$$

ou

$$\frac{A + B_1\rho_1 + B_2\rho_2 + C\rho_1\rho_2}{a^2} = \cos\left(2\pi\,\frac{t_2 - t_1}{S}\right).$$

D'autre part, la durée S et le rayon a sont liés à la durée S_0 de la révolution sidérale terrestre et au rayon moyen a_0 de l'orbite terrestre par l'égalité

$$\frac{S^2}{S_0^2} = \frac{a^3}{a_0^3},$$

de sorte que

$$\frac{A + B_1\rho_1 + B_2\rho_2 + C\rho_1\rho_2}{a^2} = \cos\left(2\pi\sqrt{\frac{a_0^3}{a^3}}\cdot\frac{t_2 - t_1}{S_0}\right). \qquad (1)$$

Enfin,

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 &= a^2, \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 &= a^2, \end{aligned}$$

ou, appelant R_1, R_2 les distances de l'observateur au Soleil aux deux observations, et φ_1, φ_2 les deux distances angulaires du Soleil et de la planète,

$$R_1^2 + \rho_1^2 - 2R_1\rho_1 \cos \varphi_1 = a^2, \qquad (2)$$
$$R_2^2 + \rho_2^2 - 2R_2\rho_2 \cos \varphi_2 = a^2. \qquad (3)$$

L'élimination de ρ_1 et ρ_2 entre les équations (1), (2), (3) laisse une égalité de la forme.

$$\cos\left(2\pi\sqrt{\frac{a_0^3}{a^3}} \cdot \frac{t_2 - t_1}{S_0}\right) = F(a),$$

où a est la seule inconnue.

Cette équation transcendante devra se résoudre par approximations successives. Une bonne première valeur a_1 de a sera fournie graphiquement par l'abscisse du point d'intersection des courbes du plan des (a, y) qui ont pour équations

$$y = \cos\left(2\pi\sqrt{\frac{a_0^3}{a^3}} \cdot \frac{t_2 - t_1}{S_0}\right),$$

$$y = F(a).$$

Posons ensuite

$$a = a_1 + \Delta a.$$

Arrêté au terme du premier degré, et après qu'on a posé, pour simplifier les écritures,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a_0^3}{a_1^3}} \cdot \frac{t_2 - t_1}{S_0},$$

un développement en série remplace l'équation en a par l'équation

$$\cos T + \frac{3}{2}\frac{\Delta a}{a_1} T \sin T = F(a_1) + \Delta a F'(a_1),$$

linéaire en Δa.

Le calcul de a permet celui de ρ_1 et de ρ_2, puis celui de (x_1, y_1, z_1) et de (x_2, y_2, z_2), et, par conséquent, celui des cosinus directeurs au plan de l'orbite dont l'équation est, en (x, y, z),

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Enfin, l'époque τ du passage au nœud ascendant est l'instant de l'un des passages de la planète sur la droite

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Si $(x_o, y_o, 0)$ sont les coordonnées de la planète à l'un ou l'autre de ses passages sur cette droite, et si on pose

$$\theta_1 = \arccos \frac{x_o x_1 + y_o y_1}{a^2}, \qquad \theta_2 = \arccos \frac{x_o x_2 + y_o y_2}{a^2},$$

les calculs se terminent par

$$\tau = t_1 - S_o \frac{\theta_1}{2\pi} \sqrt{\frac{a_o^3}{a^3}} \quad \text{ou} \quad t_2 - S_o \frac{\theta_2}{2\pi} \sqrt{\frac{a_o^3}{a^3}},$$

où l'ambiguïté de θ_1 ou de θ_2 se lève sans difficulté.

91. PARALLAXE SOLAIRE PAR LA PARALLAXE D'UNE PLANÈTE

Nous savons que la troisième loi de mouvement des planètes relie les moyennes distances de ces astres au Soleil et les durées de leurs révolutions ; de sorte que la distance de la Terre à une planète à un instant donné suffit à faire connaître les dimensions des orbites planétaires, et, en particulier, la distance de la Terre au Soleil.

On s'adresse de préférence aux planètes qui, comme Mars, se rapprochent beaucoup de la Terre ; par application de la théorie qui a été faite à propos de la distance de la Lune, l'observation de Mars à l'instant d'une conjonction et de plusieurs points de la Terre donne sa distance

$$\delta = R - \rho$$

à la Terre, où R est la distance de Mars au Soleil et ρ la distance de la Terre au Soleil. En appelant S et S_t les durées des révolu-

tions sidérales de Mars et de la Terre, on a alors :

$$\frac{(\rho + \delta)^3}{\rho^3} = \frac{S^2}{S_t^2},$$

équation d'où l'on tire la valeur de ρ.

Vénus se rapproche aussi beaucoup de la Terre lors de ses conjonctions inférieures, mais elle tourne vers la Terre son hémisphère obscur ; elle n'est donc observable que lors de ses passages sur le Soleil : l'observation, de plusieurs points de la Terre, de la projection de sa trajectoire sur le disque solaire permet alors le calcul de la parallaxe solaire.

L'observation, lors de leurs conjonctions, d'Éros et de certaines petites planètes du groupe martien, conduit à de bonnes valeurs de la parallaxe solaire.

C'est à l'observation d'Éros, pendant six mois, par 88 observatoires des deux hémisphères, qu'est due la meilleure valeur de la parallaxe du Soleil, 8″,81, indiquée plus haut, lors de l'étude de cet astre.

92. SATELLITES

Il arrive qu'autour d'une planète circulent, dans des plans de faible inclinaison mutuelle, et conformément aux trois lois du mouvement elliptique, un ou plusieurs moindres astres : ce sont *les satellites de la planète*. La Terre a un satellite (la Lune) ; Mars, deux ; Jupiter, neuf ; Saturne, dix ; Uranus, quatre ; Neptune, un. Ce sont, comme les planètes, des astres sans lumière propre, que nous ne voyons que par réflexion de la lumière solaire.

Les orbites des satellites se déterminent, après au moins trois observations, d'après les mêmes principes que les trajectoires planétaires.

Satellites de Mars. — Les satellites de Mars sont *Phobos* et *Deimos ;* leurs orbites, peu excentriques (excentricités 0,022 et 0,003), appartiennent à un même plan incliné de 1°42′ sur l'équa-

teur de la planète ; leurs mouvements se font dans le sens direct, en $0^j,319$ pour Phobos, en $1^j,262$ pour Deimos, à des distances du centre de Mars égales à 2,7 et 6,9 fois le rayon équatorial de la planète.

La durée de révolution de Phobos est plus courte que celle de la rotation de la planète : vu de celle-ci ce satellite est animé d'un mouvement apparent en sens inverse du mouvement diurne.

Les diamètres de Phobos et de Deimos sont estimés à 58 et 16 km., respectivement. Cependant, le second est plus brillant que le premier, ce qui paraît indiquer une constitution superficielle toute différente.

Satellites de Jupiter. — Les quatre principaux satellites de Jupiter, — I *Io,* II *Europe,* III *Ganymède,* IV *Callisto,* — sont visibles dans de bonnes jumelles. L'*éclipse* de l'un ou l'autre d'entre eux dans le cône d'ombre formé par la planète à l'opposé du Soleil, ou son *occultation* par la planète par rapport à la Terre, se produit en moyenne une fois par jour : prédit dans les recueils annuels, ce phénomène sert de signal aux marins pour le réglage de leurs chronomètres, et, par suite, pour la détermination de la longitude.

Les cinq autres satellites sont beaucoup moindres que les premiers. Le satellite V, dont l'orbite est intérieure à celle d'Io, a été découvert par la vision directe. Les satellites VI, VII, VIII et IX, dont les orbites sont extérieures à celle de Callisto, ont été découverts par la photographie ; et la vision directe n'a pas pu, depuis, percevoir les trois derniers.

Les orbites des satellites V, I, II, III, IV sont dans un même plan incliné de seulement 2° sur l'équateur de Jupiter. Les satellites VI et VII se meuvent dans un plan dont l'obliquité est de 30°. Enfin, la normale au plan de l'orbite des satellites VIII et IX, dans la direction pour laquelle ces astres circulent dans le sens direct, est inclinée d'environ 150° sur la direction nord de l'axe de rotation de la planète : ceci signifie que le projection de ces satellites sur l'écliptique est animée d'un mouvement rétrograde.

Les excentricités des orbites des satellites V, I, II, III, IV sont très faibles ; les autres orbites présentent une excentricité considérable.

Les cinq premiers satellites se répartissent à des distances de la planète qui sont entre elles à peu près comme les nombres 1, 2, 3, 5 et 10 ; les nombres correspondants sont environ 60 et 62 pour les satellites VI et VII ; et ce n'est qu'aux distances marquées par les nombres 124 et 132 que se rencontrent les deux derniers satellites.

Le tableau suivant fournit les éléments les plus intéressants relatifs aux satellites de Jupiter et à leurs orbites. Le diamètre des quatre gros satellites est déduit du diamètre apparent ; cet angle étant inappréciable pour les petits satellites, le diamètre de ceux-ci n'a pu être apprécié que photométriquement : on sait combien ces résultats sont incertains.

	Diamètre	*Obliquité de l'orbite sur l'équateur de la planète*	*Excentricité*	*Rayon moy. en ray. équ. de Jupiter*	*Durée de la révol. sidérale*
V	50km	2°	0,005	2,5	0j,498
I Io	3 778	2	inapp.	5,9	1 ,769
II Europe	3 150	2	inapp.	9,4	3 ,551
III Ganymède	5 843	2	0,001	15,0	7 ,155
IV Callisto	5 225	2	0,007	26,4	16 ,689
VI	160	30	0,16	160	251
VII	50	30	0,21	164	260
VIII	?	148	0,38	329	739
IX	?	150	?	348	803

Vitesse de la lumière par l'observation des satellites de Jupiter. — Si V est la vitesse de la lumière, t l'instant de l'éclipse d'un satellite de Jupiter, et D la distance de la Terre au satellite à cet instant, le phénomène est perçu par l'observateur terrestre à l'instant

$$\theta = t + \frac{D}{V}.$$

En accentuant ces notations pour une autre éclipse, on a de même

$$\theta' = t' + \frac{D'}{V}.$$

Soustrayant membre à membre,

$$\theta' - \theta = t' - t + \frac{D' - D}{V}.$$

$(D' - D)$ se calcule en fonction du rayon moyen a de l'orbite terrestre ; $(t' - t)$ est un nombre entier de fois la révolution synodique du satellite observé, période qui est connue ; les meilleures conditions sont réalisées lorsque les deux observations se font à peu près à six mois d'intervalle. On peut donc, de l'égalité précédente, déduire V en fonction de a :

$$V = \frac{a}{498^s}.$$

Satellites de Saturne. — *Mimas, Encelade, Téthys, Dioné* et *Rhéa,* les cinq satellites intérieurs de Saturne, se meuvent dans le plan des anneaux, incliné de 2°18′ sur l'équateur de la planète. Comme les derniers satellites de Jupiter, le dernier satellite de Saturne, *Phœbé,* se projette sur l'écliptique en un point dont le mouvement est rétrograde. Les orbites sont généralement presque circulaires ; cependant l'excentricité atteint 0,23, 0,10 et 0,17 pour le septième ou *Thémis,* le huitième ou *Hypérion* et le dixième satellite ou *Phœbé,* respectivement.

Thémis et Phœbé ont été découverts photographiquement. Le grand éloignement du système de Saturne n'a permis que pour un seul satellite, *Titan,* le sixième, la mesure du diamètre apparent : le diamètre conclu est de 3650 km. Les diamètres renseignés dans le tableau ci-après ont été déduits des mesures photométriques des satellites auxquels on a attribué un albedo égal à celui de Saturne. La comparaison des deux résultats pour Titan montre quel peut être l'ordre de grandeur des erreurs commises.

	Diamètre	*Obliquité de l'orbite sur l'équateur de la planète*	*Excentricité*	*Rayon moy. en ray. équ. de Saturne*	*Durée de la révol. sidérale*
Mimas	470km	2°18′	0,019	3,1	0j,94
Encelade	594	2 18	0,005	3,9	1 ,37
Téthys	916	2 18	inapp.	4,9	1 ,89
Dioné	871	2 18	0,002	6,2	2 ,74
Rhéa	1 197	2 18	0,001	8,7	4 ,52
Titan	2 259	1 57	0,029	20,2	15 ,95
Thémis	310	13 24	0,23	24,2	20 ,85
Hypérion	783	1 32	0,104	24,5	21 ,28
Japet	67	7 14	0,029	58,9	79 ,33
Phœbé	157	149 23	0,166	214,4	550 ,48

Satellites d'Uranus. — Les quatre satellites d'Uranus, *Ariel, Umbriel, Titania* et *Obéron,* décrivent leurs orbites dans des plans très peu inclinés l'un sur l'autre, mais dont l'obliquité sur le plan de l'écliptique, mesurée d'après la convention habituelle, est proche de 100°. Ainsi, les trajectoires de ces quatre astres se projettent sur le plan de l'écliptique suivant des ellipses, très allongées, il est vrai, parcourues dans le sens rétrograde. On se rappelle que le sens de rotation de la planète est également rétrograde.

On ne possède que des nombres peu précis sur les dimensions des satellites. Les diamètres indiqués dans le tableau suivant ne le sont que pour donner une idée de l'ordre de grandeur de ces quantités.

	Diamètre	*Obliquité de l'orbite sur l'écliptique*	*Excentricité*	*Rayon moy. en ray. équ. d'Uranus*	*Durée de la révol. sidérale*
Ariel	600km	97°58′	0,020	7,7	2,52
Umbriel	400	98 21	0,010	10,7	4,14
Titania	1300	97 47	0,001	17,6	8,71
Obéron	1200	97 54	0,004	23,6	13,46

Satellite de Neptune. — Le seul satellite connu de Neptune se projette sur l'écliptique en un point dont le mouvement est rétro-

grade, comme le mouvement de rotation de la planète, car la normale à l'orbite, dans le sens convenu, fait un angle de 142°40′ avec la direction nord de l'axe de l'écliptique. L'excentricité n'est que de 0,007, et le rayon moyen vaut 13 fois le rayon de la planète. La durée de révolution est de $5^j,88$.

Le diamètre de cet astre paraît être un peu supérieur à 3000^{km}.

Loi empirique de la distribution des satellites. — La loi de Belot énoncée pour la distribution des planètes s'applique aux distances moyennes a_n des satellites non rétrogrades à leurs planètes.

Dans le système de Jupiter,

$$a_n = 0{,}795 + 1{,}7175^n$$

où il faut faire $n = 1, 3, 4, 5, 6, 9, 9, 11$.

Dans le système de Saturne,

$$a_n = 0{,}1 + 1{,}311^n$$

où $n = 1, 2, 3$ (pour les anneaux), puis 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 12, 15, 20.

Dans le système d'Uranus,

$$a_n = 4{,}9 + 1{,}496^n$$

où $n = 2, 4, 6, 7$.

Dans chacune de ces formules, le rayon de la planète est pris pour unité de longueur.

93. PARALLAXE DU SOLEIL PAR LA VITESSE DE LA LUMIÈRE

On vient de voir que l'observation des éclipses des satellites de Jupiter permet d'écrire une relation entre la vitesse V de la lumière et le rayon moyen a de l'orbite terrestre :

$$V = \frac{a}{498^s}.$$

Inversement,

$$a = 498^s \,.\, V.$$

Mais on sait que, d'autre part, les physiciens mesurent la vitesse V ; et, en fonction de leurs résultats, la dernière égalité fournit une bonne valeur de a, dont on déduit la parallaxe solaire à la distance moyenne.

On a obtenu ainsi 8″,799 par la méthode de la roue dentée, et 8″,813 par la méthode du miroir tournant.

94. COMÈTES

Les *comètes* sont des astres appartenant au système solaire. Comme les planètes, elles décrivent des ellipses dont l'un des foyers est occupé par le centre du Soleil, et ce mouvement s'accomplit conformément à la loi des aires par rapport au centre du Soleil. Les orbites cométaires se distinguent des orbites planétaires :

1° par la grandeur de leur *excentricité, voisine de l'unité*,

2° par l'*obliquité quelconque* de leur plan sur l'écliptique.

A cause de l'excentricité de leur orbite voisine de l'unité, les aphélies de la plupart des comètes se projettent sur l'écliptique au delà de l'orbite de Neptune, de sorte que ces astres ne sont observables que de part et d'autre de leurs périhélies ; le long de cet arc relativement court, l'ellipse cométaire peut, en première approximation, être assimilée à une parabole (1).

Le mouvement cométaire parabolique vérifie aussi la troisième loi du mouvement planétaire ; mais cette loi n'a de sens ici que sous la forme qui l'exprime en fonction des constantes des aires et des paramètres des orbites.

---

(1) Il est peu probable que l'excentricité de certaines orbites cométaires soit précisément égale à un, ce qui les transformerait en paraboles ; mais quelques comètes ont été soupçonnées de décrire des branches d'hyperbole, d'excentricité un peu supérieure à l'unité, et ayant pour foyer le centre du Soleil. Nous verrons au chapitre suivant que ceci ne sortirait pas du plan général du système d'après lequel les astres de ce système décrivent des coniques dont le centre du Soleil occupe un foyer.

L'excentricité étant égale à l'unité, les *éléments du mouvement parabolique* ne sont plus qu'au nombre de cinq, et trois observations les déterminent surabondamment. Ces éléments sont la longitude et la latitude héliocentriques de la normale au plan de l'orbite (ou la longitude du nœud ascendant et l'inclinaison du plan de l'orbite), — le *paramètre de l'orbite,* quadruple distance du Soleil (foyer) au périhélie (sommet), — la longitude du périhélie, — et l'instant du passage à celui-ci.

Problèmes sur les orbites paraboliques. — Les problèmes proposés et résolus à propos du mouvement elliptique du Soleil autour de la Terre, et rappelés à l'occasion des mouvements planétaires restent applicables aux trajectoires cométaires ; il en est de même des notions d'anomalie vraie, moyenne, excentrique. Mais, pour la plupart des comètes, les développements en séries suivant les puissances croissantes de l'excentricité e ne sont pas convergents, et ces développements doivent se faire, au contraire, dans l'hypothèse de la petitesse de $(1 - e)$.

Reprenons ces problèmes dans l'hypothèse simplificatrice d'une orbite parabolique : il suffit d'y remplacer e par 1, et le produit $a(1 - e^2)$ par le demi-paramètre q de la parabole.

I. **Vitesses.** — Soient ρ le rayon vecteur issu du foyer, et v l'angle de position de l'astre dans le plan de son orbite ; en particulier, au périhélie, $v = v_0$. L'équation polaire de la trajectoire est

$$\rho = \frac{q}{1 + \cos(v - v_0)},$$

et la vitesse angulaire est de la forme

$$\frac{dv}{dt} = K[1 + \cos(v - v_0)]^2.$$

La constante K se déduit de ce que la vitesse aréolaire est une constante C :

$$\frac{d\Sigma}{dt} \text{ ou } \frac{1}{2}\rho^2 \frac{dv}{dt} = \frac{K}{2} q^2 = C,$$

d'où

$$K = \frac{2C}{q^2}.$$

Ainsi

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2C}{q^2}[1 + \cos(v - v_o)]^2, \quad \left(\frac{dv}{dt}\right)_{\max.} = \frac{8C}{q^2},$$

et, par conséquent, pour la vitesse linéaire,

$$\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt}\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{dv}\right)^2} = 2\sqrt{2}\frac{C}{q}\sqrt{1 + \cos(v - v_o)}, \quad \left(\frac{ds}{dt}\right)_{\max.} = \frac{4C}{q}.$$

D'autre part, en vertu de la troisième loi du mouvement planétaire, si q' et C' sont le paramètre et la constante C relatifs à un autre astre du système solaire,

$$\frac{C^2}{C'^2} = \frac{q}{q'};$$

si cet astre est la Terre, dont la durée de révolution est S et dont l'orbite a un demi-grand axe a et une excentricité e :

$$C' = \frac{\pi a^2\sqrt{1 - e^2}}{S}, \quad q' = a(1 - e^2);$$

d'où, pour la comète, en fonction des éléments de l'orbite terrestre,

$$C^2 = q\frac{\pi^2 a^3}{S^2}.$$

II. **Calcul du temps.** — L'expression de la vitesse angulaire est une équation différentielle entre le temps t et l'angle de position v. Après séparation des variables, intégration et calcul de la constante à l'instant $t = t_o$ du passage au périhélie, où $v = v_o$:

$$\frac{4C}{q^2}(t - t_o) = \operatorname{tg}\frac{v - v_o}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{v - v_o}{2}.$$

Quant à l'instant t où le rayon vecteur est ρ, il résulte de l'élimination de $(v - v_o)$ au profit de ρ, au moyen de l'équation polaire de la trajectoire :

$$\pm\frac{4C}{q^2}(t - t_o) = \left(\frac{2\rho - q}{q}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}\left(\frac{2\rho - q}{q}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

III. **Position de la comète.** — Inversement, l'équation finie en t et v est du troisième degré en $\text{tg}\,\frac{v - v_0}{2}$; elle n'a qu'une racine réelle et donne l'angle de position de la comète à l'instant t. Le rayon vecteur se tire ensuite de l'équation polaire de la trajectoire.

Aspect des comètes. — L'*aspect* des comètes est généralement caractéristique. La plupart se composent d'un *noyau*, centre brillant entouré d'une auréole lumineuse, la *chevelure,* et accompagné d'une traînée plus ou moins longue, la *queue* de la comète ; la queue, comme une émanation subissant une force répulsive de la part du Soleil, est toujours dirigée à l'opposé de celui-ci ; elle est formée d'une manière extrêmement rare, au point de ne pas diminuer la visibilité des étoiles devant lesquelles elle s'interpose.

Les apparitions de comètes sont très fréquentes ; il arrive que le calcul des éléments d'une comète la fait identifier avec une comète déjà étudiée ; de pareilles comètes sont dites *périodiques ;* leurs orbites sont nettement elliptiques, et le calcul permet de prédire leurs réapparitions, leurs passages successifs au périhélie. Les comètes dont la périodicité a été observée sont relativement peu nombreuses : on en connaît actuellement vingt-deux.

Les comètes périodiques portent les noms des astronomes qui les ont étudiées. La plus anciennement connue est la *comète de Halley* dont la plus lointaine apparition identifiée remonte à l'an 12 avant J.-C. ; sa période est de 76 ans, et son dernier passage au périhélie a eu lieu en mai 1910. Les plus anciennes apparitions identifiées des autres comètes datent de l'époque moderne. Les comètes revues le plus fréquemment comptent la *comète d'Encke,* revue trente fois depuis 1786, en dernier lieu en août 1911, avec une période de 3,3 ans ; son aphélie se projette sur l'écliptique un peu en dedans de l'orbite de Jupiter, — son périhélie à l'intérieur de l'orbite de Mercure.

La *comète de Biéla,* de période 6,7 ans, connue depuis 1772, n'a plus été revue depuis 1852 ; à son passage de 1846, elle était divisée en deux fragments, sans doute aujourd'hui désagrégés.

95. ÉTOILES FILANTES

Outre les planètes et les comètes, circulent autour du Soleil un nombre extrêmement grand de petits corps obscurs. Quand l'un d'eux rencontre l'atmosphère terrestre, sa surface est portée à l'incandescence par suite de la résistance que l'air offre à son mouvement : le corps devient ainsi visible pendant quelques secondes, sur une courte portion de sa trajectoire : c'est une *étoile filante ;* parfois il rencontre la Terre : c'est alors un *aérolithe ;* on y reconnaît la présence des métaux terrestres, mais aucun élément nouveau.

Il y a des époques où ces apparitions sont très fréquentes et plusieurs de ces *essaims* sont annuels ; ils semblent être l'effet de la rencontre de la Terre avec une traînée de *débris d'une comète* disséminés sur tout le parcours de l'orbite primitive : un essaim de fin novembre, dit des *Biélides,* paraît dû à la comète périodique de Biéla, disparue après désagrégation. Les essaims les plus abondants sont ceux des *Perséides,* du 10 au 13 août, et des *Léonides,* du 10 au 13 novembre. Ces noms viennent de ceux des constellations *Persée* et le *Lion,* d'un point desquelles les étoiles filantes paraissent émaner : c'est le *point radiant,* point de fuite commun aux perspectives, pour l'observateur terrestre, des droites sensiblement parallèles auxquelles appartiennent les parties lumineuses de leurs trajectoires.

CHAPITRE II

L'ATTRACTION UNIVERSELLE

96. LE SOLIDE STELLAIRE

Rappelons le *principe de l'inertie,* principe fondamental de la mécanique : Il existe un système de coordonnées et une façon de compter le temps tels que tout point matériel abandonné à lui-même ne puisse, dans ce système et par rapport à ce temps, qu'être au repos ou avoir un mouvement rectiligne et uniforme.

Si ce principe se vérifie dans un système d'axes coordonnés, il se vérifie dans tout système animé, par rapport au premier, d'une translation rectiligne et uniforme ; de même, observé par rapport à une manière de compter le temps, il s'observe aussi par rapport à toute autre manière dans laquelle des intervalles égaux contiennent le même nombre d'intervalles de la première manière.

Les conséquences du principe de l'inertie s'accordent toujours avec l'expérience lorsqu'on adopte pour système de coordonnées un système fixe par rapport à l'ensemble des étoiles, et pour temps le temps sidéral ou, par suite, le temps solaire moyen.

C'est à l'ensemble des étoiles, considéré comme invariable, qu'on donne le nom de *solide stellaire.*

97. ROTATION DE LA TERRE. PESANTEUR

Rotation de la Terre. — Lorsqu'on demande si la Terre tourne, on parle d'une rotation par rapport à un système d'axes par *rapport auxquels les principes de la mécanique sont vrais*, c'est-à-dire, par exemple, le solide stellaire. La réponse est sûrement affirmative : le *mouvement diurne* en témoigne d'une façon décisive.

Pesanteur. — Abandonné dans le voisinage de la surface terrestre, avec une vitesse nulle, et sans autre influence extérieure (c'est-à-dire, en particulier, dans le vide), tout corps se déplace de façon que son centre de gravité prenne, suivant une direction constante en chaque point, un mouvement rectiligne uniformément accéléré. Ce fait d'observation nous apprend que tout point matériel subit, par rapport à la Terre mobile, l'action de forces, réelles et apparentes (force centrifuge, force centrifuge composée), dont la résultante, sensiblement invariable, est dirigée vers l'intérieur de la Terre ; de plus, la vitesse, après une égale durée de chute, est la même pour tous les corps, de sorte que les résultantes des forces qu'ils subissent sont proportionnelles à leurs masses respectives.

Bornons-nous au problème de l'équilibre d'un point matériel dans le voisinage de la Terre, par exemple d'un point matériel suspendu à un fil. La condition de cet équilibre relatif est que soit égale à zéro la résultante de toutes les forces, réelles et fictives, qui agissent sur le point. Les forces réelles sont l'attraction de la Terre, manifestée par la chute des corps, et la traction du fil. La force fictive est la force centrifuge, égale au produit de la masse m par l'accélération absolue, et dirigée en sens inverse de celle-ci. Si la latitude est φ, et la Terre ellipsoïdale de révolution, de demi-grand axe a et d'excentricité ϵ, le point décrit, par rapport aux étoiles, en un jour sidéral, une circonférence

$$2\pi a \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\epsilon^2\sin^2\varphi}};$$

de sorte que sa vitesse, par seconde sidérale, est

$$\frac{2\pi a}{24 \times 60^2} \cdot \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 \varphi}},$$

et par seconde de temps moyen,

$$\frac{2\pi a}{24 \times 60^2} \cdot \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 \varphi}} \cdot \frac{366{,}242}{365{,}242}.$$

La force centrifuge est donc égale au produit de m par le carré de cette vitesse, divisé par le rayon du parallèle décrit :

$$m \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 \varphi}} \left(\frac{2\pi}{24 \times 60^2} \cdot \frac{366{,}242}{365{,}242} \right)^2 ;$$

elle est dirigée dans le prolongement du rayon de ce parallèle, perpendiculairement à l'axe de la Terre.

Ces forces, devant se faire équilibre, sont dans un même plan contenant l'axe de la Terre par raison de symétrie ; et, dans ce plan, la traction du fil est égale et opposée à la résultante de l'attraction terrestre et de la force centrifuge ; la position d'équilibre du fil appartient à la verticale, par définition de celle-ci.

Dans les problèmes d'équilibre relatif à la surface de la Terre, les choses se passent donc comme si la Terre était immobile, à condition de remplacer l'attraction terrestre par sa résultante avec la force centrifuge ; et c'est sur cette résultante que renseignent les expériences sur la chute des corps ; on l'appelle la *pesanteur* mg, où g mesure l'accélération correspondante.

Considérons d'abord la Terre comme sphérique. L'attraction terrestre est, par raison de symétrie, dirigée vers le centre ; la force centrifuge en écarte la verticale : celle-ci fait, avec le rayon terrestre, un angle, toujours petit, nul à l'équateur et aux pôles, maximum sur le parallèle de 45°.

La force centrifuge est fonction de la latitude : nulle aux pôles, elle est maximum à l'équateur, où elle n'est encore qu'une faible fraction de la pesanteur et, par suite, de l'attraction : (1 : 289) environ ; mais elle dépend du carré de la vitesse absolue, et il suffirait

que la Terre tournât dix-sept fois plus vite pour que les corps fussent, à l'équateur, dépourvus de poids. La force centrifuge diminuant, g augmente de l'équateur aux pôles.

Il est une autre cause à l'augmentation de la pesanteur de l'équateur aux pôles : la forme ellipsoïdale de la Terre éloigne de son centre un point matériel de sa surface d'autant plus que la latitude est moindre, et l'attraction terrestre varie en conséquence ; mais cette variation est liée à la loi qui exprime, en fonction des distances, les actions mutuelles des points matériels, et cette loi ne nous sera donnée que par l'observation des mouvements célestes.

L'accélération g, due à la pesanteur, varie, au niveau de la mer, de 978,0 à l'équateur, à 983,2 aux pôles, en prenant pour unités le centimètre et la seconde de temps moyen ; à la latitude de 50°, elle vaut 981,1 ; elle est bien représentée, en fonction de la latitude L et de l'altitude H, par la formule

$$g = 980{,}632^{cm}\left(1 - \frac{2644}{10^6}\cos 2\,L - \frac{314}{10^{11}}\,H^{cm}\right),$$

que nous considérerons comme empirique.

Dans les problèmes de mouvement relatif à la surface de la Terre, la force centrifuge composée, qui s'annule en même temps que la vitesse relative, n'est représentée dans les équations que par des termes dont les coefficients sont très petits : de sorte qu'elle est négligeable toutes les fois que la vitesse relative n'est pas très grande ; même alors on peut souvent ne pas en tenir compte : les efforts qu'elle fait subir à l'axe et aux coussinets d'un volant, même en rotation rapide, sont insensibles vis-à-vis des fatigues dues au poids de la pièce et à la traction de la courroie ; quant à la force centrifuge, on en tient compte par cela même qu'on fait entrer dans les calculs la pesanteur et non l'attraction terrestre.

Le *gyroscope* est un tore pesant suspendu par son centre de gravité, et autour duquel il peut tourner dans tous les sens : mis en rotation rapide, il manifeste les effets de la force centrifuge composée.

Preuves mécaniques de la rotation de la Terre. — On appelle *preuves mécaniques de la rotation de la Terre* des phénomènes qui manifestent cette rotation par rapport aux étoiles ; ils témoigneraient de cette rotation si les étoiles étaient invisibles.

1. La mécanique démontre qu'un corps, abandonné avec une vitesse nulle dans le voisinage de la Terre, ne rencontre pas le sol sur la verticale de son point de départ : il subit, vers l'est, une *déviation* très faible, que l'observation de chutes de grande hauteur a cependant fait reconnaître ; on comprend, en effet, que la vitesse absolue initiale est plus grande que la vitesse absolue du pied de la verticale, et le point mobile gagne sur celui-ci, en projection horizontale, dans le sens du mouvement de rotation.

2. Un *pendule sphérique* est un corps solide susceptible d'osciller autour d'un point fixe. Réalisons un pendule sphérique par une petite sphère massive reliée par un fil mince au point fixe de suspension, et installons-le au pôle nord, son point de suspension sur l'axe de la Terre et sa position d'équilibre dans la direction de celui-ci. Écartons-le de cette position et abandonnons-le avec une vitesse nulle. Calculons son mouvement, par rapport aux étoiles, sous l'influence de l'attraction terrestre. Ses oscillations se feront dans un plan de direction invariable, de sorte que, si nous ignorions la rotation de la Terre, nous la constaterions par une rotation apparente du pendule en un jour sidéral, dans le sens du mouvement diurne. Le même phénomène devra se reproduire à toute latitude (différente de zéro), le temps de rotation croissant dans le rapport de un à la sécante de la colatitude. L'expérience confirme la théorie.

Mesure de l'accélération due à la pesanteur. — Un *pendule* (non sphérique) est un corps solide susceptible d'osciller autour d'une droite horizontale. La mécanique établit l'expression de la durée 2T d'une oscillation complète (aller et retour) du pendule en fonction de ses constantes et des conditions initiales de son mouvement. Soient P le poids du pendule, a la distance du centre de gravité à l'axe de suspension, I le moment d'inertie par rapport

à cet axe, et α l'angle que fait avec sa position verticale d'équilibre le plan défini par le centre de gravité et l'axe de suspension à l'instant où le pendule est abandonné avec une vitesse nulle à l'action de la pesanteur. On sait que

$$T = 2\sqrt{\frac{I}{aP}} \int_0^{\alpha} \frac{d\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}}$$

ou, calculant par un développement en série suivant les puissances de $\sin^2\frac{\alpha}{2}$ la fonction figurée par l'intégrale définie,

$$T = \pi\sqrt{\frac{I}{aP}}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4\frac{\alpha}{2} + \cdots\right\},$$

qui converge d'autant plus rapidement que α est moindre, et qui, pour α médiocre, peut se réduire à

$$T = \pi\sqrt{\frac{I}{aP}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right).$$

Or, si le pendule est homogène,

$$I = MJ$$

où M est la masse du pendule et J une fonction des éléments qui définissent sa forme et ses dimensions ; et comme $P = Mg$,

$$T = \pi\sqrt{\frac{J}{ag}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right).$$

Dans cette équation, $(J : a)$ peut être calculé, α mesuré, et T apprécié par comparaison avec un pendule à seconde. On peut donc en tirer, à la même approximation,

$$g = \frac{\pi^2 J}{T^2 a}\left(1 + \frac{1}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right);$$

et la valeur définitive de g s'en déduit après de petites corrections dues à l'influence de l'air (résistance, frottement, entraînement) et aux oscillations inévitables du support.

Une autre manière de déterminer g repose sur l'existence (démontrée par la mécanique) dans le pendule, d'une droite, dite *axe d'oscillation,* parallèle à l'axe de suspension, et telle que la durée d'oscillation ne changerait pas si elle s'effectuait autour de ce second axe. La distance l des deux axes est égale au rapport (J : a) des équations précédentes.

Un *pendule réversible* est un pendule à deux couteaux dont la distance est réglable jusqu'à ce qu'ils soient axes de suspension et d'oscillation ; si on mesure leur distance l dans ces conditions,

$$g = l\frac{\pi^2}{T^2}\left(1 + \frac{1}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right).$$

Exploration dynamique du géoïde. — La grandeur de g en un point de la surface de la Terre considérée comme un ellipsoïde de révolution est une fonction des coordonnées de ce point et des éléments de cet ellipsoïde. Ainsi, les mesures de g en deux points distincts de la surface terrestre suffisent, en principe, au calcul de l'aplatissement du géoïde. La discussion d'un nombre croissant d'observations permet aujourd'hui ce calcul avec une exactitude de plus en plus grande.

Mais le géoïde ne peut avoir cette forme géométrique simple : les surfaces de niveau voisines de la surface terrestre sont déformées par des influences locales, comme celles des massifs montagneux. L'exploration du géoïde au moyen du pendule permet, par des retouches successives, une connaissance de plus en plus satisfaisante de son allure par rapport à l'ellipsoïde terrestre considéré dès lors comme une surface géométrique de repère.

98. ATTRACTION UNIVERSELLE

Planètes. — Nous avons déduit de l'observation les lois du mouvement planétaire. Partant de ces lois, nous allons chercher la nature de la force à laquelle est soumise chaque planète.

1. Prenons pour plan XY le plan de l'orbite planétaire, avec le

centre du Soleil pour origine. Soient (x, y), (r, v) les coordonnées rectangulaires et polaires du centre de la planète à l'instant t. C'étant une constante, la loi des aires s'exprime par l'égalité

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{dv}{dt} = C,$$

ou par les égalités

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = 2C_1,$$

$$z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = 2C_2,$$

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = 2C_3.$$

Nous savons que lorsque le mouvement d'un point matériel s'accomplit de manière à vérifier la loi des aires par rapport à un point, l'accélération et, par suite, la résultante des forces passent constamment par ce point. Pour le retrouver ici, il suffit de dériver les dernières équations :

$$y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

$$z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

Ainsi, *la force appliquée au centre de la planète passe constamment par le centre du Soleil.*

2. Appliquons maintenant la deuxième loi du mouvement planétaire à la recherche de la nature de cette force. Écrivons F sa mesure, et convenons que F sera positif ou négatif suivant que cette force est dirigée vers le Soleil ou à l'opposé du Soleil, c'est-à-dire suivant qu'elle est, par rapport au Soleil, une *attraction* ou une *répulsion*.

Si m est la masse de la planète, l'équation des forces vives s'écrit

$$\frac{m}{2}d\left\{\frac{dr^2+r^2\,dv^2}{dt^2}\right\}=-\,\mathrm{F}dr.$$

Éliminons le temps entre cette équation et celle qui exprime la loi des aires ; de l'équation obtenue tirons F :

$$\mathrm{F}=-\,2m\mathrm{C}^2\,\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r^4}\cdot\frac{dr^2}{dv^2}+\frac{1}{r^2}\right].$$

Par hypothèse, le centre de la planète décrit une ellipse : l'équation polaire de cette courbe est

$$r=\frac{q}{1+e\,\cos\,(v-v_0)},$$

dont les constantes ont une signification connue. Calculons $\frac{dr}{dv}$, substituons dans l'expression de F, et, au moyen de l'équation de la trajectoire, éliminons v au profit de r :

$$\mathrm{F}=4m\,\frac{\mathrm{C}^2}{q}\cdot\frac{1}{r^2}.$$

La force appliquée au centre de la planète est *une attraction inversement proportionnelle au carré de la distance au centre du Soleil.*

3. Cherchons enfin la signification de la troisième loi du mouvement planétaire. La constante C est la vitesse aréolaire : c'est le rapport de l'aire $\pi a^2\sqrt{1-e^2}$ de l'ellipse, dont le demi-grand axe est a, à la durée S de la révolution planétaire :

$$\mathrm{C}^2=\frac{\pi^2a^3}{\mathrm{S}^2}\,q;$$

d'où

$$\mathrm{F}=4m\,\frac{\pi^2a^3}{\mathrm{S}^2}\cdot\frac{1}{r^2}.$$

D'après la troisième loi du mouvement planétaire, le rapport

$$a^3:\mathrm{S}^2$$

est indépendant de la planète considérée ; il en est donc de même du coefficient

$$k = 4\frac{\pi^2 a^3}{S^2},$$

et la force appliquée au centre de la planète a pour expression

$$F = k\frac{m}{r^2},$$

dans laquelle *la constante* k *est valable pour tout le système planétaire.*

Comètes. — L'étude ci-dessus n'a fait aucune hypothèse sur la grandeur de l'excentricité *e*. Or ce n'est que par la valeur de *e* qu'un mouvement cométaire diffère (dans son plan) d'un mouvement planétaire, et nous savons que la troisième loi du mouvement planétaire peut se mettre sous une forme applicable aux orbites paraboliques. Les comètes sont donc, comme les planètes, attirées vers le Soleil proportionnellement à leur masse, et en raison inverse du carré de la distance au Soleil : le coefficient de proportionnalité *k* est le même que celui qui sert à exprimer l'attraction subie par les planètes.

Satellites. — Les satellites se meuvent autour des planètes comme celles-ci se meuvent autour du Soleil, et les résultats qui viennent d'être acquis sont applicables au moins aux planètes entourées de *plusieurs satellites* (de façon que la troisième loi de ce mouvement ait l'occasion de s'appliquer) : chaque satellite est attiré par la planète en raison inverse du carré de sa distance à celle-ci, et les attractions subies par plusieurs satellites d'une même planète ne dépendent que de leurs masses et des distances à la planète. Ainsi, si μ est la masse d'un satellite, ρ sa distance à la planète, α le demi-grand axe de son orbite, Σ la durée de sa révolution, la force attractive Φ a pour expression

$$\Phi = \kappa\frac{\mu}{\rho^2},$$

où

$$\kappa = \frac{4\pi^2\alpha^3}{\Sigma^2},$$

et le coefficient κ est le même pour tous les satellites d'une même planète, mais varie d'une planète à l'autre.

Attraction terrestre. — Ces conclusions ne sont plus légitimes pour la Terre qui ne possède qu'un satellite, de sorte que l'observation ne peut y vérifier la troisième loi du mouvement elliptique. Mais nous connaissons expérimentalement la valeur de l'accélération g due à la pesanteur et, après déduction de la force centrifuge, la valeur g_1 de l'attraction terrestre en un point de l'équateur, à la distance R, rayon équatorial, du centre de la Terre. Si un satellite décrivait une circonférence à cette distance, son accélération normale serait égale à g_1. D'autre part, la Lune décrit une orbite, que nous considérons comme circulaire, à la distance 60,27 R, en 27 j. 7 h. 43 m. 11 s., 5 ou 2 360 591 s., 5 ; son accélération normale est donc

$$\frac{\kappa}{\rho^2} = \frac{\kappa}{60{,}27^2 R^2} = \frac{4\pi^2 . 60{,}27^3 . R^3}{(2\,360\,591{,}5)^2} \cdot \frac{1}{60{,}27^2 . R^2} =$$

$$= \frac{2\pi . 60{,}27^3 . 2\pi R}{(2\,360\,591{,}5)^2} \cdot \frac{1}{60{,}27^2}.$$

Or, le calcul du premier facteur, avec le mètre pour unité,

$$\frac{2\pi . 60{,}27^3 . 40\,000\,000}{(2\,360\,591{,}5)^2}$$

fait précisément retrouver l'accélération g_1 due à l'attraction terrestre. Ainsi, l'accélération que la Lune subit de la part de la Terre est égale à l'accélération que celle-ci imprime aux corps de la surface, multipliée par le carré du rapport du rayon terrestre au rayon moyen de l'orbite lunaire. C'est la même force, inversement proportionnelle au carré de la distance, qui retient les corps à la surface de la Terre et la Lune sur son orbite.

Attraction universelle. — Le Soleil attire une planète de masse m avec une intensité $(km : r^2)$, et cette planète attire tout point matériel de masse μ avec une intensité $(\kappa\mu : \rho^2)$; appliquons ce résultat au Soleil lui-même, de masse M : alors $\rho = r$, et l'attraction de la planète sur le Soleil est égale à $(\kappa M : r^2)$; ces deux attractions sont égales et

$$mk = M\kappa, \qquad \frac{k}{M} = \frac{\kappa}{m}.$$

Mais ceci est vrai pour toutes les planètes de masses m', m'',.. et de coefficients d'attraction κ', κ''... respectivement. On a donc la suite de rapports égaux

$$\frac{k}{M} = \frac{\kappa}{m} = \frac{\kappa'}{m'} = \frac{\kappa''}{m''} = \ldots.$$

Soit f leur valeur commune. Le coefficient d'attraction propre au Soleil devient fM, et l'attraction du Soleil sur une planète de masse m à la distance r s'exprime par

$$\frac{fMm}{r^2}.$$

Les coefficients d'attraction propres aux différentes planètes deviennent fm, fm', fm'',... et leurs attractions sur des satellites de masses μ, μ', μ'',... aux distances ρ, ρ', ρ'',... s'expriment par

$$\frac{fm\mu}{\rho^2}, \quad \frac{fm'\mu'}{\rho'^2}, \quad \frac{fm''\mu''}{\rho''^2}, \ldots$$

Il apparaît donc comme une loi tout à fait générale que *deux corps quelconques s'attirent proportionnellement à leurs masses et en raison inverse du carré de leur distance.* C'est la loi de l'*attraction universelle.* (1)

---

(1) Il semble résulter de recherches récentes que la loi de l'attraction universelle s'étend même au milieu introduit sous le nom d'*éther* par les physiciens comme agent de production ou de propagation des phénomènes électriques, magnétiques, lumineux, calorifiques : à la surface de la Terre, il faudrait environ 10^5 km^3 d'éther pour atteindre un poids d'un kg. Ces considérations perdent évidemment toute signification dans les hypothèses d'après lesquelles l'éther serait aussi l'agent de la gravitation.

Dans la formule qui exprime cette loi, f est l'attraction de l'unité de masse sur l'unité de masse, à une distance égale à l'unité. A condition de prendre pour unités le centimètre, la masse d'un centimètre cube d'eau à 4° et la seconde de temps moyen, des déterminations expérimentales ont fourni

$$f = 0{,}000\,000\,067.$$

La loi de l'attraction universelle contient plus que ce que permettaient strictement les lois du mouvement des planètes, des comètes et des satellites et l'observation de la chute des corps à la surface de la Terre. Au contraire, si les lois du mouvement planétaire étaient rigoureuses, l'attraction universelle serait inacceptable. En effet, toute planète, d'après cette loi, subit non seulement l'attraction solaire, mais aussi celle des autres planètes ; entre autres *perturbations,* la résultante des forces qui agissent sur elle ne passe plus tout à fait par le centre du Soleil ou par un point fixe quelconque, et la loi des aires ne peut plus se vérifier parfaitement. Il importe donc de reprendre l'étude du système planétaire en admettant l'*hypothèse* de l'attraction universelle, de *calculer* les mouvements nécessaires des astres dans cette hypothèse, et de chercher si l'observation confirme les écarts qu'elle leur impose vis à vis des lois du mouvement elliptique.

Problème des deux corps. — *Équations différentielles du mouvement relatif.* — Commençons par le cas le plus simple dans lequel deux astres seulement, de masses M et m, se trouveraient en présence : le Soleil et une planète (ou le Soleil et une comète, ou une planète et un satellite) (1).

Par rapport aux axes des principes de la mécanique, soient (X, Y, Z) les coordonnées du Soleil M, et soient $(X + x, Y + y, Z + z)$ les coordonnées de la planète ; posons

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (2)$$

(1) Si la planète possède des satellites, m est la masse de la planète et de ses satellites, et le mouvement cherché est celui du centre de gravité de cet ensemble.

(2) On voit que l'on raisonne, dans le problème des deux corps, comme si la masse de chacun d'eux était condensée à son centre de gravité. On démontre

Par rapport à ces axes les équations différentielles du mouvement de la masse M sont

$$M\frac{d^2X}{dt^2} = fMm\frac{x}{r^3},$$

$$M\frac{d^2Y}{dt^2} = fMm\frac{y}{r^3},$$

$$M\frac{d^2Z}{dt^2} = fMm\frac{z}{r^3},$$

dans lesquelles, aux seconds membres, un facteur $\left(\frac{x, y, z}{r}\right)$ est le cosinus de l'angle que fait avec l'axe correspondant la direction du segment r ; celui-ci se projette sur cet axe suivant la différence des coordonnées de même nom : $(X + x) - X$,...

De même, les équations différentielles du mouvement de la planète sont

$$m\frac{d^2(X + x)}{dt^2} = - fMm\frac{x}{r^3},$$

$$m\frac{d^2(Y + y)}{dt^2} = - fMm\frac{y}{r^3},$$

$$m\frac{d^2(Z + z)}{dt^2} = - fMm\frac{z}{r^3}.$$

Pour déduire de ce double système les équations différentielles du mouvement de la planète par rapport à des axes parallèles aux premiers et passant constamment par le centre du Soleil, il suffit de diviser chaque équation du premier système par M, chaque équation du deuxième par m, et de soustraire deux à deux les équations ainsi écrites. En posant

$$\mu = f(M + m),$$

---

cependant que ceci n'est exact que si les deux corps sont formés de couches sphériques homogènes Or, il n'en est pas ainsi ; mais on démontre encore que l'erreur commise diminue comme le *carré* des rapports des dimensions des deux corps à leur distance. Elle est négligeable pour les corps célestes.

on obtient

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{x}{r^3} = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \mu\frac{y}{r^3} = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \mu\frac{z}{r^3} = 0.$$

Ainsi, le *mouvement relatif* de la planète par rapport au Soleil est le même que si le Soleil était immobile, à condition d'augmenter la masse de celui-ci de la masse de la planète (1).

Intégrales premières. — I. Dans chaque couple d'équations du mouvement, multiplions chaque équation par la variable qui, outre r, entre dans l'autre, et retranchons membre à membre ; les termes finis disparaissent pour laisser une équation comme

$$y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2x}{dt^2} = 0\,;$$

d'où, et pour les autres combinaisons semblables, avec A, B, C constantes d'intégration :

---

(1) Il était facile de l'apercevoir dès avant d'écrire les équations du mouvement. La distance des deux astres étant r, les accélérations absolues, dirigées positivement vers le Soleil, sont

$$-f\frac{m}{r^2} \text{ pour le Soleil,} \quad f\frac{M}{r^2} \text{ pour la planète.}$$

L'accélération relative de la planète est donc

$$f\frac{M+m}{r^2},$$

et la force relative d'attraction est

$$f\frac{(M+m)m}{r^2}.$$

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = \mathrm{A},$$

$$z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = \mathrm{B},$$

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = \mathrm{C}.$$

De ces *intégrales des aires* on déduit, comme il est nécessaire lorsque la force passe par un point fixe :

1. La somme des produits par x, y, z respectivement des expressions égalées à A, B, C, est égale à zéro,

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z = 0,$$

et la planète se meut *dans un plan passant par le centre du Soleil.*

2. Les projections du rayon Soleil-planète sur chacun des trois plans coordonnés se déplacent avec une vitesse aréolaire constante, A, B ou C : cette projection balaie des aires proportionnelles aux temps. Il en est par conséquent de même sur tout autre plan ; il en est ainsi, en particulier, sur le plan même de la trajectoire : le mouvement planétaire observe la *loi des aires.* Dans le plan de la trajectoire, la vitesse aréolaire est

$$\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2},$$

au double de laquelle on donne le nom de *constante des aires.*

II. D'autre part, l'addition des équations du mouvement multipliées par $2dx$, $2dy$, $2dz$, fait apparaître une nouvelle différentielle exacte :

$$d\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right) 2\mu\, d\,\frac{1}{r} = 0.$$

La quantité entre parenthèses est le carré de la vitesse V de la planète ; d'où, au moyen d'une constante d'intégration ($\mu : a_0$),

$$\mathrm{V}^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a_0}\right),$$

comme on aurait pu l'écrire immédiatement en invoquant le *principe des forces vives*.

Cette intégrale offre un premier moyen de déterminer la nature de la trajectoire ; car y exprimant V au moyen des coordonnées polaires de la planète dans le plan de sa trajectoire, et dont r est l'une, on obtient une équation différentielle du premier ordre entre ces coordonnées. Cette équation s'intègre sans difficulté par simple séparation des variables.

Equation différentielle en r. — Proposons nous plutôt d'étudier d'abord le mouvement de la planète le long de la droite issue du Soleil. Posons

$$x = r\alpha, \quad y = r\beta, \quad z = r\gamma,$$

où les cosinus directeurs (α, β, γ) de cette direction sont liés par

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \quad \text{ou} \quad \Sigma\alpha^2 = 1, \qquad (a)$$

et sont, par suite, tels à chaque instant que, par trois dérivations,

$$\Sigma\alpha \frac{d\alpha}{dt} = 0 \qquad (b)$$

$$\Sigma\alpha \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \Sigma\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = 0, \qquad (c)$$

$$\Sigma\alpha \frac{d^3\alpha}{dt^3} + 3\,\Sigma \frac{d\alpha}{dt}\frac{d^2\alpha}{dt^2} = 0. \qquad (d)$$

Par ce changement de variables, les équations du mouvement s'écrivent

$$r^3 \frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2r^2 \frac{dr}{dt}\frac{d\alpha}{dt} + \left(r^2 \frac{d^2r}{dt^2} + \mu\right)\alpha = 0,$$

$$r^3 \frac{d^2\beta}{dt^2} + 2r^2 \frac{dr}{dt}\frac{d\beta}{dt} + \left(r^2 \frac{d^2r}{dt^2} + \mu\right)\beta = 0,$$

$$r^3 \frac{d^2\gamma}{dt^2} + 2r^2 \frac{dr}{dt}\frac{d\gamma}{dt} + \left(r^2 \frac{d^2r}{dt^2} + \mu\right)\gamma = 0.$$

Pour nous débarrasser des α, β, γ, effectuons sur les équations

ci-dessus les combinaisons suivantes, dont les résultats se simplifient en vertu des identités (*a*) et (*b*).

1. Addition membre à membre des équations du mouvement multipliées respectivement par α, β, γ :

$$r^3 \Sigma \alpha \frac{d^2\alpha}{dt^2} + r^2 \frac{d^2 r}{dt^2} + \mu = 0. \qquad (e)$$

2. Addition membre à membre des équations du mouvement multipliées respectivement par $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt}$:

$$r \Sigma \frac{d\alpha}{dt} \frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \Sigma \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 = 0. \qquad (f).$$

3. Dérivation des équations du mouvement, et addition membre à membre des équations obtenues multipliées respectivement par α, β, γ :

$$5r \frac{dr}{dt} \Sigma \alpha \frac{d^2\alpha}{dt^2} + r^2 \Sigma \alpha \frac{d^3\alpha}{dt^3} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d^2 r}{dt^2} + r \frac{d^3 r}{dt^3} = 0.$$

Nous sommes en présence de cinq équations (*c*, *d*, *e*, *f*, *g*) renfermant les grandeurs à éliminer (α, β, γ) sous les seules quatre formes

$$\Sigma \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2, \qquad \Sigma \alpha \frac{d^2\alpha}{dt^2}, \qquad \Sigma \frac{d\alpha}{dt} \frac{d^2\alpha}{dt^2}, \qquad \Sigma \alpha \frac{d^3\alpha}{dt^3}.$$

Leur élimination laisse l'équation différentielle cherchée :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & r^3 & 0 & 0 & r^2 \frac{d^2 r}{dt^2} + \mu \\ 2 \frac{dr}{dt} & 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 5r \frac{dr}{dt} & 0 & r^2 & 2 \frac{dr}{dt} \frac{d^2 r}{dt^2} + r \frac{d^3 r}{dt^3} \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\frac{d}{dt} \left(r^3 \frac{d^2 r}{dt^2} \right) + \mu \frac{dr}{dt} \quad 0.$$

Une première intégration est immédiate : introduisant une constante arbitraire q, on écrit

$$\frac{d^2r}{dt^2} + \mu \frac{r - q}{r^3} = 0.$$

Nature de la trajectoire. — Nous savons que la trajectoire planétaire est plane et nous avons écrit l'équation de son plan :

$$Ax + By + Cz = 0. \qquad (1)$$

D'autre part nous venons d'obtenir une équation différentielle en r qui peut remplacer l'une des équations du mouvement, de manière que, par exemple, les deux systèmes

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \mu \dfrac{x}{r^3} = 0, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + \mu \dfrac{y}{r^3} = 0, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} + \mu \dfrac{z}{r^3} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \mu \dfrac{x}{r^3} = 0, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + \mu \dfrac{y'}{r^3} = 0, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} + \mu \dfrac{r - q}{r^3} = 0, \end{cases}$$

sont équivalents. Ainsi le point mobile dont les coordonnées seraient x, y, $r - q$ aurait aussi une trajectoire plane, et le plan de celle-ci passerait par l'origine : ces coordonnées sont unies par une équation linéaire homogène,

$$Ux + Vy + W(r - q) = 0. \qquad (2)$$

La trajectoire planétaire est donc l'intersection du plan (1) et de la surface représentée par l'équation (2) ; or, dans cette équation, r vaut $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ et la surface correspondante est une quadrique. La courbe décrite par le point (x, y, z) est donc *une section conique*. De plus, d'après l'équation (2), le rayon vecteur r est une fonction linéaire de x et de y ; il en est de même par rapport à y et z, z et x; et *le centre du Soleil,* origine des coordonnées, *est un foyer de la conique décrite par la planète.*

Éléments géométriques de l'orbite. — Nous savons que les éléments de l'orbite sont au nombre de six : cinq éléments géomé-

triques et un élément cinématique (sans compter un élément dynamique, la masse de la planète). Or, nous avons introduit jusqu'ici cinq constantes géométriques : les rapports de deux des quantités A, B, C à la troisième, — les rapports de deux des quantités U, V, M à la troisième, — et la constante d'intégration q.

Il s'agit maintenant de calculer les éléments géométriques ordinairement considérés, en fonction des éléments géométriques actuels.

Le calcul des coordonnées polaires (α, δ) de la normale au plan de l'orbite est sans difficulté : en posant

$$1 : K = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

on trouve

$$\sin \delta = CK \, , \cos \alpha = \frac{AK}{\cos \delta} \, , \sin \alpha = \frac{BK}{\sin \delta}.$$

Pour calculer, en fonction de U, V, W et q, les éléments de l'orbite dans son plan, effectuons un changement de coordonnées qui donne le plan de l'orbite pour nouveau plan XY : les cosinus directeurs du nouvel axe Z sont AK, BK, CK ; appelons (A_1, B_1, C_1) et (A_2, B_2, C_2) les cosinus directeurs des nouveaux axes X et Y, respectivement.

La transformation consiste à remplacer dans l'équation de la quadrique

$$\begin{array}{lll} x & \text{par} & A_1 x + A_2 y + AKz, \\ y & » & B_1 x + B_2 y + BKz, \\ z & » & C_1 x + C_2 y + CKz ; \end{array}$$

et l'équation de la conique même s'obtient en remplaçant z par zéro dans l'équation ainsi obtenue :

$$r \text{ ou } \sqrt{x^2 + y^2} = q - \frac{U}{W}(A_1 x + A_2 y) - \frac{V}{W}(B_1 x + B_2 y).$$

Il est avantageux d'obtenir l'équation de cette conique en coordonnées polaires r et v, à quoi l'on arrivera, enfin, par la substitution

$$x = r \cos v, \quad y = r \sin v,$$

pour obtenir

$$r\left(1+\frac{UA_1+VB_1}{W}\cos v+\frac{UA_2+VB_2}{W}\sin v\right)=q.$$

Exprimons les coefficients de cos v et sin v au moyen de deux constantes nouvelles e et v_0 en posant

$$UA_1+VB_1=We\cos v_0,$$
$$UA_2+VB_2=We\sin v_0,$$

et cette équation devient

$$r=\frac{q}{1+e\cos(v-v_0)},$$

dans quoi nous reconnaissons l'équation d'une conique dont q est le *demi-paramètre*, e l'*excentricité* et v_0 l'*angle de position* de l'extrémité de l'axe focal la plus voisine de l'origine, c'est-à-dire, astronomiquement, *du périhélie*.

Il reste à calculer e et v_0. L'élimination de v_0 entre les équations qui définissent e et v laisse une équation en e, nombre essentiellement positif :

$$e^2=\frac{(UA_1+VB_1)^2+(UA_2+VB_2)^2}{W^2}$$

Mais e^2, grandeur attachée à la trajectoire même, ne peut pas dépendre des directions des axes de repère dans le plan de celle-ci. En fait, les relations

$$A_1^2+A_2^2+K^2A^2=1,$$
$$B_1^2+B_2^2+K^2B^2=1,$$
$$A_1B_1+A_2B_2+K^2AB=0$$

qui, entre autres, unissent les cosinus directeurs des axes, permettent l'élimination de trois des quantités A_1, B_1, A_2, B_2, et cette élimination fait, de plus, disparaître la quatrième :

$$e^2=\frac{U^2+V^2+K^2(UA+VB)^2}{W^2}.$$

Ensuite,

$$\cos v_0=\frac{UA_1+VB_1}{We},\quad \sin v_0=\frac{UA_2+VB_2}{We},\quad \operatorname{tg} v_0=\frac{UA_2+VB_2}{UA_1+VB_1}.$$

L'expression de e^2 permet d'écrire la relation entre les constantes qui doit être satisfaite pour que l'orbite soit

1. elliptique, $K^2 (UA + VB)^2 < W^2 - U^2 - V^2$;
2. parabolique, $K^2 (UA + VB)^2 = W^2 - U^2 - V^2$;
3. hyperbolïque, $K^2 (UA + VB)^2 > W^2 - U^2 - V^2$.

Élément cinématique. — Pour retrouver l'élément cinématique de l'orbite, instant du passage en un point déterminé, adressons-nous à l'équation différentielle en r :

$$\frac{d^2r}{dt^2} + \mu \frac{r - q}{r^3} = 0.$$

Après multiplication par $dr = \frac{dr}{dt} dt$, une première intégration abaisse son ordre d'une unité :

$$\frac{dr}{dt} \cdot \frac{d^2r}{dt^2} dt + \frac{\mu}{r^2} dr - \frac{\mu q}{r^3} dr = 0,$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - 2\frac{\mu}{r} + \frac{\mu q}{r^2} + \mu p = 0,$$

après introduction d'une constante qui a été écrite μp. Cette constante est géométrique ; elle ne peut être nouvelle, et doit s'exprimer en fonction des précédentes. A l'instant où la planète passe au périhélie,

$$r = \frac{q}{1 + e}, \frac{dr}{dt} = 0, 0 - 2\mu \frac{1 + e}{q} + \mu q \left(\frac{1 + e}{q}\right)^2 + \mu p = 0,$$

d'où

$$p = \frac{1 - e^2}{q}.$$

L'équation différentielle du premier ordre en r est donc

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - 2\frac{\mu}{r} + \frac{\mu q}{r^2} + \mu \frac{1 - e^2}{q} = 0.$$

La séparation des variables r et t réduit son intégration à une quadrature :

$$t = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int \frac{r\,dr}{\sqrt{2r - \frac{1-e^2}{q} r^2 - q}} + \text{const.}$$

Pour effectuer cette quadrature, il faut distinguer trois cas, suivant que la trajectoire est une ellipse, une parabole ou une hyperbole.

I. Si la trajectoire est elliptique, $1 - e^2 > 0$, et cette quadrature s'effectue commodément par la substitution à la variable r d'une variable u définie par

$$r = \frac{q}{1-e^2}(1 - e\cos u) ;$$

par cette substitution,

$$t = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{q}{1-e^2}\right)^{\frac{3}{2}} (u - e\sin u) + \text{const.}$$

Pour exprimer la constante, appliquons cette équation à l'instant t_0 du passage de la planète au périhélie :

$$\sqrt{\mu} \left(\frac{1-e^2}{q}\right)^{\frac{3}{2}} (t - t_0) = u - e\sin u.$$

Dans la nouvelle variable u on reconnaît *l'anomalie excentrique*, et dans le coefficient de $(t - t_0)$ *le moyen mouvement en longitude*.

Éliminant r entre l'équation polaire de la trajectoire et l'équation par laquelle u a été définie en fonction de r, nous retrouverions l'équation qui lie l'anomalie excentrique u à l'anomalie vraie $(v - v_0)$:

$$\cos(v - v_0) = \frac{\cos u - e}{1 - e\cos u}, \quad \sin(v - v_0) = \frac{\sqrt{1-e^2}\,.\,\sin u}{1 - e\cos u},$$

ou

$$\operatorname{tg}\frac{v - v_0}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg}\frac{u}{2}.$$

II. Si la trajectoire est parabolique, $1 - e^2 = 0$, et

$$dt = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int \frac{r dr}{\sqrt{2r - q}} + \text{const.},$$

d'où, en exprimant la constante d'intégration au moyen de l'instant t_o du passage au périhélie,

$$t - t_o = \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \left[q(2r - q)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} (2r - q)^{\frac{3}{2}} \right].$$

Et comme

$$r = \frac{q}{1 + \cos(v - v_o)}, \quad 2r - q = q \operatorname{tg}^2 \frac{v - v_o}{2},$$

on a aussi

$$t - t_o = \frac{q^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{\mu}} \left[\operatorname{tg} \frac{v - v_o}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{v - v_o}{2} \right].$$

III. L'orbite hyperbolique est, ici, sans intérêt.

Les constantes des intégrales premières. — I. La constante des aires h est le double de la vitesse aréolaire

$$h = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = 1 : K = r^2 \frac{dv}{dt}.$$

D'où, d'après les expressions ci-dessus de v en fonction de t (soit directement, soit par l'intermédiaire de l'anomalie excentrique), et tous calculs faits,

$$h = \sqrt{\mu q}.$$

Considérons deux planètes, de masses m_1 et m_2, dont la constante des aires et le paramètre prennent le même indice 1 ou 2 ; eu égard à la signification de μ :

$$\frac{h_1^2}{h_2^2} = \frac{1 + \frac{m_1}{M}}{1 + \frac{m_2}{M}} \cdot \frac{q_1}{q_2};$$

les carrés des aires décrites par le rayon vecteur pendant un même temps sont d'autant plus proches d'être entre eux comme les paramètres des orbites, que les masses des planètes sont moindres.

En particulier, si l'orbite est elliptique, avec S pour durée de la révolution sidérale,

$$h = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{S}, \quad q = a(1 - e^2),$$

d'où

$$4\pi^2 a^3 = \mu S^2 ;$$

et pour deux planètes dont les éléments sont caractérisés par des indices 1 et 2,

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{1 + \frac{m_1}{M}}{1 + \frac{m_2}{M}} \cdot \frac{S_1^2}{S_2^2}.$$

La proposition ci-dessus et cette relation spéciale aux orbites elliptiques correspondent à la *troisième loi observée du mouvement planétaire*. On comprend que l'observation ait pu faire écrire, pour cette loi,

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{S_1^2}{S_2^2} :$$

nous verrons, en effet, que le plus grand rapport (m : M) est moindre que 0,001.

II. L'intégrale de la force vive est

$$V^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a_o}\right).$$

Or

$$V^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \sqrt{\mu q}\,\frac{dv}{dt},$$

d'où, tous calculs faits, une équation qui donne l'expression de a_o en fonction des constantes précédentes :

$$a_o = \frac{q}{1 - e^2}.$$

Ainsi, dans une orbite elliptique, où

$$q = a(1 - e^2),$$

la constante a_o se confond avec le demi-grand axe a.

Dans une orbite parabolique, $1 : a_o = 0$, et l'intégrale de la force vive se réduit à

$$V^2 = \frac{2\mu}{r}.$$

Dans tous les cas, l'équation de la force vive peut s'écrire

$$1 - e^2 = -\frac{q}{\mu}\left(V^2 - \frac{2\mu}{r}\right),$$

et l'orbite est une ellipse, une parabole ou une hyperbole suivant que la constante

$$V^2 - \frac{2\mu}{r},$$

est négative, nulle ou positive. *La nature de la conique planétaire ne dépend donc, à un instant déterminé, que de la grandeur de la vitesse, non de sa direction.*

Problème des (n + 1) corps. — Autour du Soleil gravitent, non pas une, mais un grand nombre de planètes, et celles-ci ajoutent à l'attraction solaire leurs attractions mutuelles.

Le problème des deux corps est donc insuffisant : il faudrait considérer toutes les planètes à la fois ; écrire que l'accélération totale de chacune d'elles, multipliée par sa masse, est égale à la résultante des attractions du Soleil, des $(n-1)$ autres et de la force fictive introduite dans l'étude du mouvement relatif par rapport au Soleil ; obtenir ainsi $3n$ équations différentielles dont la résolution donnerait les coordonnées des n planètes à tout instant, en fonction de leurs coordonnées et de leurs vitesses à un instant donné.

Encore qu'un progrès considérable ait été récemment réalisé par l'intégration des équations différentielles du *problème des trois corps,* les ressources actuelles de l'analyse ne permettent pas la résolution du problème des $(n + 1)$ corps ; aussi doit-on procéder par *approximations successives.* La prépondérance de la masse solaire, la petitesse des dimensions des planètes vis-à-vis de leurs distances permettent de considérer le problème des deux corps

(et le mouvement elliptique) comme une première approximation que des corrections viendront perfectionner de plus en plus : c'est l'étude du mouvement elliptique *troublé,* ou le calcul des *perturbations* subies par le mouvement elliptique. Nous allons exposer, dans son principe, la *méthode de la variation des constantes arbitraires.*

Les équations différentielles du mouvement troublé sont de la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{x}{r^3} = X,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \mu\frac{y}{r^3} = Y,$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} + \mu\frac{z}{r^3} = Z,$$

dans lesquelles on reconnaît les termes dus à l'influence prépondérante du Soleil, et où X, Y, Z représentent les termes dus aux autres planètes.

Soient

$$x = f_1(t, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6),$$
$$y = f_2(t, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6),$$
$$z = f_3(t, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$$

les intégrales des équations du mouvement non troublé. Elles satisfont aux équations différentielles ci-dessus dans le cas particulier où

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$

et renferment six constantes d'intégration liées par des équations distinctes aux six éléments elliptiques, et qui peuvent être, par conséquent, ces six éléments eux-mêmes.

Dans le mouvement troublé, ces éléments sont variables, et le problème consiste dans leur calcul en fonction du temps, de façon que le passage de la planète de la trajectoire elliptique à la trajectoire troublée se fasse sans discontinuité dans la vitesse, ni en direction, ni en grandeur. Si nous écrivons entre parenthèses

les dérivées par rapport au temps à la fois explicite et contenu dans les éléments variables a, on doit donc avoir :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dx}{dt}, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{dy}{dt}, \quad \left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{dz}{dt},$$

c'est-à-dire

$$\sum \frac{dx}{da}\frac{da}{dt} = 0, \quad \sum \frac{dy}{da}\frac{da}{dt} = 0, \quad \sum \frac{dz}{dt}\frac{da}{dt} = 0. \quad (1)$$

D'autre part, et eu égard à ces trois premières équations,

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} + \sum \frac{d^2x}{da\,dt}\frac{da}{dt},$$

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \frac{d^2y}{dt^2} + \sum \frac{d^2y}{da\,dt}\frac{da}{dt},$$

$$\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \frac{d^2z}{dt^2} + \sum \frac{d^2z}{da\,dt}\frac{da}{dt},$$

et comme les $\frac{d^2(x, y, z)}{dt^2}$ satisfont par hypothèse aux équations du mouvement non troublé,

$$\sum \frac{d^2x}{da\,dt}\frac{da}{dt} = X, \quad \sum \frac{d^2y}{da\,dt}\frac{da}{dt} = Y, \quad \sum \frac{d^2z}{da\,dt}\frac{da}{dt} = Z. \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) constituent un système de six équations différentielles du premier ordre en a_1, a_2, ... a_6 ; la petitesse des termes perturbateurs X, Y, Z permet l'intégration de ces équations par approximations successives.

Des cinq éléments géométriques du mouvement de chacune des planètes, la *stabilité du système solaire* exige que le grand axe, l'excentricité et l'inclinaison sur l'écliptique ne puissent varier indéfiniment dans le même sens. Ces importantes propriétés se constatent dans les expressions de ces éléments, calculés comme il vient d'être dit. Les grands axes (et, par conséquent, les moyens mouvements) ne présentent que des inégalités périodiques ; cependant, lorsque les moyens mouvements de deux planètes sont

presque commensurables, comme il arrive aux moyens mouvements de Jupiter et de Saturne, ces planètes s'influencent l'une l'autre par une inégalité de leur grand axe considérable et dont la période est extrêmement longue. Enfin, les excentricités et les inclinaisons sont liées aux distances moyennes, de manière à devoir rester petites tant que celles-ci varient peu. La stabilité du système solaire est donc assurée.

L'hypothèse de l'attraction universelle est pleinement confirmée par la confrontation de toutes ses conséquences (sauf encore, actuellement, deux ou trois) avec l'observation. Son triomphe a été la découverte de la planète transuranienne, Neptune, par le calcul appliqué aux perturbations constatées dans le mouvement d'Uranus. De même, certaines perturbations, mal expliquées encore, de Neptune et de Mercure ne conduiront-elles pas un jour à la découverte de planètes transneptuniennes et intramercurielles ? A moins que ces perturbations ne trouvent (comme il le semble déjà pour Mercure) leur explication dans la *mécanique nouvelle* que les physiciens tirent aujourd'hui du *principe de relativité*, et dont il ne sera bientôt plus possible de ne point parler dans un cours, même élémentaire, d'astronomie.

Précession. — Nous allons chercher à nous rendre compte, d'une manière élémentaire, de la cause mécanique du phénomène de précession.

Considérons le sphéroïde terrestre, de centre T et figurons-le (fig. 31) par sa projection équatoriale et par sa projection dans le plan déterminé par son axe de symétrie TP et la position du Soleil S. Soit γ la direction de l'équinoxe de printemps. Supposons, pour fixer les idées, la déclinaison du Soleil positive et décroissante (été). Si la Terre était sphérique (et constituée de couches homogènes), la résultante des attractions du Soleil sur l'ensemble de ses points passerait par son centre T. Mais il n'en est pas ainsi ; considérons la Terre comme ellipsoïdale de révolution (et constituée de couches de révolution homogènes). Pour une déclinaison du Soleil positive, la partie du renflement équatorial la plus voisine du

Soleil a une déclinaison moindre que celui-ci et la résultante des attractions solaires, située dans le plan PTS par raison de symétrie, rencontre l'axe terrestre en un point situé, comme en L, entre le centre T et le pôle sud. Cette résultante tend donc à imprimer à la Terre une rotation autour de la perpendiculaire menée par T au plan PTS, et située, par conséquent, dans le plan de l'équateur.

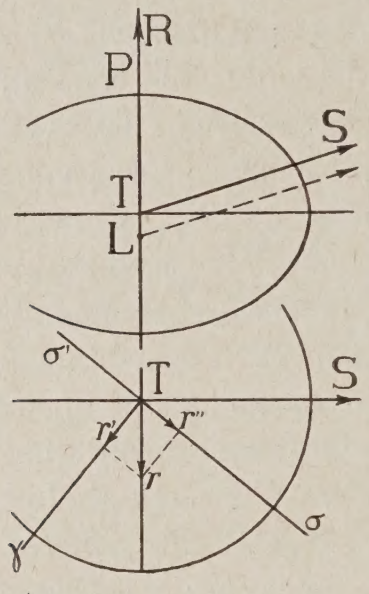

FIG. 31.

Figurons cette rotation par un vecteur Tr perpendiculaire au plan PTS, dont l'origine est en T, la longueur censée proportionnelle à la vitesse angulaire (sans que nous ayons même à nous faire une idée de cette grandeur), et le sens tel que, pour ce sens, la rotation soit directe (gauchère). Figurons aussi la rotation non troublée de la Terre autour de son axe de symétrie TP, suivant les mêmes conventions, par un vecteur TR.

Décomposons la rotation perturbatrice Tr, dans le plan de l'équateur, en Tr' suivant l'équinoxe γ, et en Tr'' suivant la perpendiculaire à l'équinoxe, qui se confond avec la projection équatoriale de la ligne des solstices.

Si la rotation perturbatrice se réduisait à Tr', la rotation figurée par la résultante TR' des vecteurs TR et Tr' tendrait à amener l'équateur dans le plan perpendiculaire à sa direction, et ferait,

par conséquent, *rétrograder l'équinoxe dans l'écliptique*. Cette rétrogradation de l'équinoxe, au moins dans la situation actuelle, est donc une première conséquence de l'aplatissement du sphéroïde terrestre. La composante Tr' (nulle aux passages du Soleil aux équinoxes, maximum aux passages aux solstices) est toujours dirigée vers l'équinoxe de printemps, et c'est *toujours une rétrogradation* qu'elle imprime à celui-ci.

D'autre part, si la rotation perturbatrice se réduisait à Tr'', la rotation figurée par la résultante TR'' des vecteurs TR et Tr'' tendrait à amener l'équateur dans le plan perpendiculaire à sa direction, et ferait, par conséquent, *varier l'obliquité de l'écliptique*. Cette deuxième conséquence de l'aplatissement du sphéroïde terrestre est, dans la situation actuelle, une augmentation de l'obliquité. Comme la composante Tr'', nulle aux passages du Soleil aux solstices, appartient au méridien du solstice d'été ou au méridien du solstice d'hiver suivant que la déclinaison du Soleil est décroissante ou croissante, cette rotation perturbatrice augmente l'obliquité de l'équateur sur l'écliptique en été et en automne, et diminue cette obliquité en hiver et au printemps : Cette *variation périodique à courte période* est inappréciable.

Si la Terre ne pouvait pas être considérée comme de révolution, la rotation perturbatrice Tr n'appartiendrait pas au plan de l'équateur, et il faudrait lui donner une troisième composante Tr''' perpendiculaire aux deux premières Tr' et Tr'', c'est-à-dire située le long de l'axe de rotation non troublée ; cette nouvelle composante perturbatrice s'ajouterait algébriquement à la rotation non troublée pour rendre un peu variable la vitesse de rotation de la Terre en fonction de la déclinaison solaire.

Ce qui vient d'être dit de l'attraction solaire peut se répéter pour l'attraction lunaire. Les effets perturbateurs de ces deux attractions s'ajoutent de manière à provoquer une rétrogradation continue de l'équinoxe. La vitesse de ce mouvement se décompose en une partie constante et en une petite partie périodique. La première est la précession proprement dite. Dans les expressions données au chap. III de la deuxième partie nous n'avons pas parlé

de la partie périodique de cette vitesse, pas plus que des petites variations périodiques de l'obliquité de l'écliptique.

Calcul de l'aplatissement de la Terre par les observations astronomiques. — Si la Terre était, plutôt qu'un ellipsoïde aplati, un ellipsoïde de révolution allongé, les conclusions ci-dessus seraient renversées et la ligne des équinoxes serait animée d'un mouvement direct dans l'écliptique. — Pour une loi déterminée de la variation de la densité des couches ellipsoïdales dont la Terre est censée composée, la constante de la précession est une fonction de l'aplatissement terrestre. — Inversement, dans l'hypothèse de telle variation des densités, l'aplatissement terrestre se calcule au moyen de la constante de la précession, et se déduit, par conséquent, d'observations astronomiques. — Enfin, le rapprochement de la constante de la précession et de l'aplatissement terrestre connu par les mesures géodésiques, permettrait de préciser une loi de variation des densités à laquelle on aurait laissé une indétermination convenable.

Nutation. — Nous venons de voir que les petites variations périodiques dues à la même cause que la précession sont négligeables.

Ceci reste vrai tant que le plan de l'orbite de l'astre troublant garde une inclinaison constante sur le plan de l'équateur. Il n'en est pas ainsi pour la Lune : le plan de l'orbite de cet astre garde une inclinaison à peu près constante sur le plan de l'écliptique, mais la rétrogradation de la ligne de ses nœuds fait varier de 18 à 28° son inclinaison sur le plan de l'équateur.

Il en résulte une *perturbation périodique* dans le phénomène de précession ; et cette perturbation a pour période la révolution des nœuds lunaires, à savoir 18 ans 2/3. Elle consiste dans une variation notable de la vitesse de rétrogradation de l'équinoxe et une oscillation marquée de l'obliquité de l'écliptique. Nous avons vu que les choses se passent comme si l'axe terrestre vrai décrivait un petit cône elliptique autour de l'axe terrestre moyen, affecté de la seule précession.

Existence des surfaces terrestres de niveau. — Cherchons la condition pour que l'ensemble des verticales soit un ensemble de normales ; c'est-à-dire pour qu'il existe des surfaces de niveau, surfaces perpendiculaires à la verticale de chacun de leurs points.

Construisons un système d'axes invariablement liés à la Terre. Soient (x, y, z) les coordonnées d'un point quelconque, et $f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$, $f_3(x, y, z)$ les composantes de la pesanteur en ce point.

f_1, f_2, f_3 sont proportionnels aux cosinus directeurs de la verticale. La condition de perpendicularité de la verticale à une certaine surface est donc

$$f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz = 0,$$

qui est l'équation différentielle de cette surface.

Pour que cette équation différentielle soit complètement intégrable, il faut et il suffit qu'on ait identiquement

$$f_1\left(\frac{df_3}{dy} - \frac{df_2}{dz}\right) + f_2\left(\frac{df_1}{dz} - \frac{df_3}{dx}\right) + f_3\left(\frac{df_2}{dx} - \frac{df_1}{dy}\right) = 0;$$

et cette condition est indépendante des axes coordonnés.

Cette condition est vérifiée, en particulier, si chaque différence entre parenthèses est identiquement nulle. Nous allons voir qu'il en est ainsi si la résultante de toutes les forces réelles qui agissent sur le point considéré admet une fonction de forces, U, ce qui est le cas des forces inversement proportionnelles aux carrés des distances.

Prenons pour axe Z l'axe de rotation de la Terre. Appelons m la masse du point, ω la vitesse angulaire de rotation de la Terre par rapport aux axes des principes de la mécanique.

Les composantes de la pesanteur sont

$$f_1 = \frac{dU}{dx} - m\omega^2 x\ ,\ f_2 = \frac{dU}{dy} - m\omega^2 y\ ,\ f_3 = \frac{dU}{dz}.$$

La condition d'intégrabilité se vérifie immédiatement. L'intégrale générale est

$$U - \frac{m}{2}\,\omega^2(x^2 + y^2) = C.$$

La constante C est déterminée dès qu'on impose à la surface de niveau de passer par un point. Le géoïde, en particulier, est déterminé par un seul de ses points. Il n'y a pas de solution singulière.

99. MASSE ET DENSITÉ DES PLANÈTES

Masse des planètes accompagnées de satellites. — Occupons-nous d'abord de la masse m d'une planète possédant au moins un satellite, de masse μ.

Nous savons que les masses M du Soleil et m de la planète sont liées au demi-grand axe a de l'orbite de celle-ci et à sa révolution sidérale S par

$$f(M + m) = \frac{4\pi^2 a^3}{S^2}.$$

De même, les masses m de la planète et μ du satellite sont liées de la façon suivante au demi-grand axe α de l'orbite du satellite et à sa révolution sidérale Σ :

$$f(m + \mu) = \frac{4\pi^2 \alpha^3}{\Sigma^2}.$$

Divisons membre à membre, et négligeons m vis-à-vis de M, μ vis-à-vis de m :

$$\frac{m}{M} = \frac{\alpha^3}{\Sigma^2} : \frac{a^3}{S^2}.$$

L'observation fournit a et α, S et Σ : cette égalité donne donc m en fonction de M.

Masse de la Terre. — Appliquée à la Terre, cette méthode conduit à des valeurs peu satisfaisantes : c'est que la masse de la Lune n'est pas négligeable vis-à-vis de celle de la Terre. On traite alors comme un satellite un corps, de masse μ, de la surface terrestre. Une pesée, corrigée de la force centrifuge, donne l'accélération g_1 que la Terre lui imprime. D'autre part, on possède

la valeur de g_1 en fonction de la masse m de la Terre (considérée comme sphérique), car

$$\mu g_1 = f\frac{m\mu}{R^2} \quad \text{ou} \quad g_1 = f\frac{m}{R^2}.$$

En éliminant f entre cette égalité et

$$f(M + m) = \frac{4\pi^2 a^3}{S^2}$$

il vient

$$\frac{M}{m} = \frac{4\pi^2 a^3}{g_1 S^2 R^2} - 1,$$

équation dont le second membre est entièrement connu.

Masse des planètes dépourvues de satellites. — La méthode des satellites n'est pas applicable non plus à Mercure et Vénus qui n'ont pas de compagnons connus ; du reste, on ne s'en contente pour aucune planète : les perturbations que les planètes se causent mutuellement donnent un moyen souvent aussi sensible de la détermination de leurs masses. Les équations du mouvement troublé renferment les rapports des masses planétaires à la masse solaire, et des quantités dont les mesures peuvent être déduites des observations ; en remplaçant ces dernières par leurs valeurs, on aura un système d'équations en $\frac{m}{M}, \frac{m'}{M}, \frac{m''}{M}, \ldots$; le nombre d'équations est supérieur au nombre d'inconnues et la résolution se fait par application de la théorie des erreurs (1). En particulier

(1) Les diverses méthodes de la mécanique céleste se vérifient et se complètent. La valeur de f a été tirée de la relation

$$f(M + m) = \frac{4\pi^2 a^3}{S^2};$$

appliquée à l'orbite terrestre, en prenant comme unité de distance la distance moyenne de la Terre au Soleil ($a = 1$), — comme unité de temps, le jour solaire moyen ($T = 365{,}2563835$), — comme unité de masse, la masse du Soleil ($m = 1 : 354710$) ; ce calcul a donné

$$\sqrt{f} = 0{,}017\,202\,098\,95.$$

Mais, depuis ce calcul, on a acquis des valeurs plus exactes de T et de m ; on

la masse de Jupiter a été fort bien déterminée par l'influence de cette planète sur les astéroïdes les plus extérieurs et sur certaines comètes qui ont passé dans son voisinage ; ces résultats sont d'accord avec ceux que fournit la méthode des satellites.

Pesanteur à la surface des planètes. — On calcule aussi la pesanteur à la surface des planètes : il s'agit de l'accélération que prendrait, dans le vide, un corps abandonné dans le voisinage de la surface planétaire. Si R est le rayon de la planète (que nous considérons comme sphérique), connu par l'observation, m sa masse calculée comme il vient d'être dit, et f la constante d'attraction, l'attraction planétaire est

$$f\frac{m}{R^2}.$$

Il reste à la composer avec la force centrifuge, calculée d'après la vitesse de rotation, et fonction de la latitude planétaire.

Densité des planètes. — Supposons la planète sphérique et homogène, et son rayon R connu par l'observation ; son volume est $\frac{4}{3}\pi R^3$; sa masse par unité de volume est $\frac{3}{4}\frac{m}{\pi R^3}$; appelons-la sa *masse spécifique*.

A la surface de la Terre, cette unité de volume pèserait $\frac{3}{4}\frac{gm}{\pi R^3}$, et, avec un choix convenable des unités, ce nombre exprimerait sa densité ; on l'appelle la *densité de la planète ;* celle-ci est donc ce que serait le poids spécifique d'un échantillon moyen de la planète transporté à la surface de la Terre.

Le tableau suivant fait connaître la masse et la densité du Soleil et des planètes, et la pesanteur à l'équateur de chacun d'eux (celle-ci avec la pesanteur à l'équateur terrestre prise pour unité).

---

a cependant préféré ne pas changer la valeur de $\sqrt{f}$, quitte à modifier en conséquence l'unité de distance ; ceci équivaut à choisir arbitrairement l'unité de coefficient d'attraction, plutôt que l'unité de longueur, et de façon que le rayon moyen de l'orbite terrestre soit très voisin de l'unité.

	Inverses des rapports des masses à celle du Soleil	*Densité*	*Pesanteur à l'équateur*
Soleil	1	1,4	27,9
Mercure	5 500 000	6,2	0,41
Vénus	410 000	5,0	0,88
Terre	330 000	5,5	1
Mars	3 090 000	3,8	0,37
Jupiter	1 047	1,4	2,53
Saturne	3 500	0,7	1,06
Uranus	23 000	1,3	0,92
Neptune	19 500	1,2	0,95

On remarquera la grande densité moyenne de la Terre, bien supérieure à la densité moyenne des éléments voisins de sa surface : ceux-ci sont beaucoup moins denses que les éléments profonds. Dans des recherches théoriques, on a admis que la densité d d'une couche terrestre est liée au quotient $(x : \mathrm{R})$ de sa distance au centre par le rayon de la Terre, par une équation de la forme

$$d = a\left(1 - b\frac{x^2}{\mathrm{R}^2}\right),$$

pour laquelle on a proposé

$$a = 10{,}6, \qquad b = 0{,}8,$$

ainsi que

$$a = 10{,}0, \qquad b = 0{,}75.$$

Mesure de la densité moyenne de la Terre. — Les physiciens ont déterminé expérimentalement la densité moyenne D de la Terre par un grand nombre de procédés dont chacun des principaux peut se ramener à l'un des suivants.

1. Comparaison de l'attraction exercée par une montagne dont le volume et la nature géologique sont connus, et de l'attraction produite par la reste de la Terre : la montagne provoque la déviation de fils à plomb installés dans son voisinage, et ces déviations sont fonctions de quantités connues et de la densité D cherchée.

2. Déviation causée par de grandes masses métalliques sur des masses solidaires soit d'une balance de torsion, soit d'un pendule très sensible.

3. Comparaison de g mesuré au moyen du pendule au niveau de la mer et dans une mine profonde, ou sur une montagne élevée.

Les recherches les mieux conduites ont donné des valeurs de D comprises entre 5,49 et 5,56. Les résultats les plus récents sont 5,527 et 5,505.

Masse des satellites. — Les masses des satellites dont plusieurs appartiennent à une même planète se déduisent des perturbations dues à leurs actions mutuelles. Les masses des quatre principaux satellites de Jupiter sont les fractions suivantes de la masse de la planète :

Io	1 : 59 000,
Europe	1 : 43 000,
Ganymède	1 : 11 000,
Callisto	1 : 23 000.

Dans le système de Saturne, la rétrogradation du grand axe de l'orbite d'Hyperion due à l'influence de Titan donne pour celui-ci une masse égale à 1 : 4700 de la masse de la planète. La masse totale des anneaux est évaluée à 1 : 620 de la même unité.

La masse de la Lune se déduit de la nutation terrestre ; elle est égale aux (10 : 815) de la masse de la Terre, à quoi correspondent une densité de 3,33 et une pesanteur à l'équateur égale aux 0,166 de la pesanteur à l'équateur terrestre.

Forme des corps célestes. — Des points matériels extrêmement nombreux, soumis uniquement à l'attraction universelle, se disposent en forme de sphère. Mais si une sphère fluide est animée d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe, à l'attraction mutuelle des points matériels s'ajoute, comme force fictive, la force centrifuge, variable avec la position du point matériel vis-

à-vis de l'axe de rotation. Quelle est la figure d'équilibre relatif d'un liquide *homogène* en rotation uniforme ? Dans l'état actuel de l'analyse, on ne peut que se proposer une surface et démontrer sa possibilité ou son impossibilité. — Pour une vitesse de rotation donnée, inférieure à un maximum calculable ω_1, il existe deux ellipsoïdes de révolution autour de l'axe de rotation, admissibles comme surface libre ; et pour une vitesse inférieure à un maximum ω_2 ($\omega_2 < \omega_1$), il existe, comme pareille surface, un ellipsoïde à trois axes inégaux, dont l'un doit être l'axe de rotation. Ces ellipsoïdes sont, de plus, stables, s'ils diffèrent suffisamment peu d'une sphère.

La forme ellipsoïdale de révolution s'observe sur la plupart des planètes. Les choses se passent donc comme si, d'abord fluides ou semi-fluides, elles avaient pu prendre la forme ellipsoïdale correspondant à leur vitesse de rotation à cette époque. Mais, pour la vitesse angulaire actuelle de la Terre et sa densité moyenne, notre sphéroïde aurait réalisé un ellipsoïde de révolution dont l'aplatissement est (1 : 231), tandis que son aplatissement mesuré est (1 : 297). On ne peut donc pas admettre que la Terre ait été primitivement un fluide homogène.

100. PARALLAXE DU SOLEIL PAR LES INÉGALITÉS DU MOUVEMENT ELLIPTIQUE

La mécanique céleste établit les expressions des perturbations du mouvement elliptique des planètes et des satellites. Si l'expression d'une inégalité mesurée renferme, outre des quantités connues, le rayon moyen a de l'orbite terrestre, son rapprochement de sa valeur observée constitue une équation en a. En particulier, ces circonstances se présentent d'une manière favorable dans une petite inégalité du mouvement lunaire dite inégalité parallactique, dans une perturbation apportée par la Lune au mouvement de la Terre, et dans les perturbations des mouvements de Mars et de Vénus provoquées par le voisinage de la Terre. Ces

trois phénomènes conduisent respectivement aux valeurs suivantes de la parallaxe solaire à la distance moyenne :

8″,81, 8″,85, 8″,83.

101. MARÉES

Les phénomènes. — Le niveau de la mer sur une verticale quelconque est soumis à des oscillations périodiques dont l'amplitude est assez grande pour les distinguer nettement des mouvements variables et irréguliers causés par le vent ; ces oscillations périodiques constituent les *marées* : le *flux* est l'élévation du niveau de la mer ; il se termine par la *pleine mer* et est suivi du *reflux*, pendant lequel le niveau baisse jusqu'à ce qu'il y ait *basse mer*.

La période du phénomène, durée totale d'un flux et d'un reflux consécutifs, est, en moyenne, de 12 h. 25 m., c'est-à-dire d'un demi-jour lunaire ; ceci établit une relation immédiate entre le mouvement de la mer et la position de la Lune. Mais la position du Soleil n'est pas non plus sans influence sur les marées : en effet, l'*amplitude* de la marée, différence des niveaux lors d'une pleine mer et d'une basse mer consécutives, est variable en chaque point, et la période de ses variations est la *révolution lunaire synodique ;* elle passe par un maximum peu après chaque syzygie, et par un minimum peu après chaque quadrature ; ce sont respectivement les marées de *vive eau* et de *morte eau*.

Les deux marées consécutives du jour lunaire peuvent être d'amplitudes presque égales, comme sur les côtes d'Europe, ou très différentes, comme dans les mers de Chine, au point, parfois, que l'une des deux devienne insensible, et qu'il n'y ait, par jour lunaire, qu'une pleine mer et une basse mer.

Théorie statique. — Les marées, par leurs périodes, manifestent donc des influences lunaire et solaire. Cherchons à nous en rendre compte en ne considérant d'abord que l'action d'un seul astre, et posons-nous, dans ce but, le problème suivant.

Un sphéroïde, comme le sphéroïde terrestre, est totalement ou partiellement recouvert d'eau ; son mouvement de rotation est assez lent pour que les conséquences mécaniques de ce mouvement puissent être négligées, de sorte que, sur ce sphéroïde isolé dans l'espace, la surface liquide appartiendrait à une surface sphérique : appelons R le rayon de celle-ci. Mais un astre, dont la distance ρ est assez grande pour que les puissances de $(R : \rho)$ soient négligeables à partir de la quatrième, trouble le champ de l'attraction du sphéroïde de manière à modifier les surfaces de niveau, et celle, en particulier, à laquelle appartient, à chaque instant, la surface d'équilibre des mers. On considère un point de cette surface dont les coordonnées géographiques sont (λ, φ) et la distance au centre r. Le rapport $\frac{r - R}{R}$ est une fonction de la position de l'astre troublant. On demande cette fonction, en permettant de négliger les quantités de l'ordre de $\left(\frac{r - R}{R}\right)^2$.

L'équation générale des surfaces de niveau s'écrit en égalant la fonction des forces à une constante. Ici, le potentiel du champ est, à chaque instant, la somme des trois potentiels suivants :

1. le potentiel dû aux forces qui, seules, maintiendraient la surface libre sur la sphère de rayon R : c'est une fonction $U(r, \lambda, \varphi)$;

2. le potentiel dû aux déplacements de masses correspondant à la dénivellation de la surface vraie par rapport à la surface sphérique : c'est une fonction $v(r, \lambda, \varphi)$;

3. le potentiel dû à l'astre perturbateur, fonction comme $V(r, \lambda, \varphi)$.

L'équation de toute surface de niveau est donc à chaque instant, avec une constante C,

$$U(r, \lambda, \varphi) + v(r, \lambda, \varphi) + V(r, \lambda, \varphi) = C.$$

C'est aussi l'équation des surfaces de niveau variables avec le temps, si l'on considère v, V et C comme des fonctions du temps. Il reste à établir les expressions de U, v, V. Mais deux remarques vont simplifier ce calcul.

1. La fonction U peut s'écrire $U\left[R\left(1+\frac{r-R}{R}\right), \lambda, \varphi\right]$ et se développer suivant les puissances de $\frac{r-R}{R}$:

$$U(r, \lambda, \varphi) = U(R, \lambda, \varphi) + \frac{r-R}{R}\left(\frac{dU}{d\frac{r-R}{R}}\right)_o,$$

développement qu'il suffit d'écrire, par hypothèse, avec ces deux termes, ou

$$U(r, \lambda, \varphi) = U(R, \lambda, \varphi) + (r-R)\left(\frac{dU}{dr}\right)_o.$$

2. La quantité $v(r, \lambda, \varphi)$ est de l'ordre de $\left(\frac{r-R}{R}\right)^2$ et peut être négligée.

L'équation de la surface de niveau est donc

$$(r-R)\left(\frac{dU}{dr}\right)_o + V(r, \lambda, \varphi) = C - U(R, \lambda, \varphi).$$

$U(R, \lambda, \varphi)$ est le premier membre de l'équation de la surface de niveau sphérique. C'est donc une constante qui peut rentrer dans C. D'autre part, $\left(\frac{dU}{dr}\right)_o$ est la projection sur le rayon vecteur terrestre de l'attraction terrestre agissant sur un point matériel dans le voisinage de la surface sphérique d'équilibre. Si m est la masse de la Terre, et μ la masse du point matériel considéré,

$$\left(\frac{dU}{dr}\right)_o = -f\mu\frac{m}{R^2},$$

d'où

$$r - R = \frac{V - C}{f\mu} \cdot \frac{R^2}{m}.$$

En un point quelconque (λ, φ) de la surface liquide dont l'aire est σ, prenons un élément de surface $d\sigma$, et faisons le produit $(r-R)d\sigma$. La somme

$$\int_\sigma (r-R)d\sigma$$

serait le volume total *algébrique* compris entre la surface σ et la surface troublée, et nul, par conséquent, si la surface σ était plane. L'erreur commise en l'admettant encore ici est de l'ordre de $\left(\frac{r-\mathrm{R}}{\mathrm{R}}\right)^2$; donc

$$\int_\sigma (\mathrm{V}-\mathrm{C})d\sigma = 0$$

d'où

$$\mathrm{C} = \frac{1}{\sigma}\int_\sigma \mathrm{V}d\sigma,$$

c'est-à-dire la moyenne, que nous noterons [V], de la fonction V sur l'aire σ ; et

$$r-\mathrm{R} = \frac{\mathrm{V}-[\mathrm{V}]}{f\mu}\cdot\frac{\mathrm{R}^2}{m}.$$

Le calcul de V, potentiel de l'astre, par rapport à des axes liés à la Terre, est sans difficulté. Si la masse de l'astre est M, et Δ sa distance au point de masse μ, le potentiel des forces réelles est

$$f\mu\frac{\mathrm{M}}{\Delta},$$

à quoi il faut ajouter le potentiel des forces fictives. Mais la force centrifuge est négligeable, par hypothèse. Si J_x, J_y, J_z sont les composantes, parallèlement aux trois axes, de l'accélération J imprimée au centre de la Terre par l'astre troublant, le potentiel des forces fictives se réduit donc à la fonction dont les trois dérivées partielles sont $-\mu\mathrm{J}_x$, $-\mu\mathrm{J}_y$, $-\mu\mathrm{J}_z$, et cette fonction est

$$-\mu\mathrm{J}_x x - \mu\mathrm{J}_y y - \mu\mathrm{J}_z z.$$

En écrivant Z pour l'angle sous lequel, du centre de la Terre, on voit le segment Δ, cette fonction prend la forme

$$-\mu\mathrm{J}r\left(\frac{\mathrm{J}_x}{\mathrm{J}}\cdot\frac{x}{r}+\frac{\mathrm{J}_y}{\mathrm{J}}\cdot\frac{y}{r}+\frac{\mathrm{J}_z}{\mathrm{J}}\cdot\frac{z}{r}\right) \quad \text{ou} \quad -\mu\mathrm{J}r\cos\mathrm{Z}.$$

Enfin, si ρ est la distance du centre de la Terre à l'astre,

$$\mathrm{J} = f\frac{\mathrm{M}}{\rho^2},$$

et le potentiel relatif cherché est

$$V = f\mu\frac{M}{\Delta} - f\mu\frac{M}{\rho^2}r\cos Z = f\mu M\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 - 2r\rho\cos Z + r^2}} - \frac{r\cos Z}{\rho^2}\right).$$

Mais cette expression de V va servir au calcul de la quantité petite $\frac{r-R}{R}$; c'est une fonction de r ou, aussi bien, de $\frac{r-R}{R}$. On ne commettra donc, dans le calcul de $\frac{r-R}{R}$, qu'une erreur finale de l'ordre de $\left(\frac{r-R}{R}\right)^2$ en développant V suivant les puissances de $\frac{r-R}{R}$, et en négligeant déjà le terme du premier degré, c'est-à-dire, en remplaçant, dans V, r par R :

$$V = f\mu M\left\{\frac{1}{\sqrt{\rho^2 - 2R\rho\cos Z + R^2}} - \frac{R\cos Z}{\rho^2}\right\}$$

qu'on peut encore écrire de manière à faire apparaître le rapport (R : ρ),

$$V = \frac{f\mu M}{R}\left\{\frac{R}{\rho}\frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{R}{\rho}\cos Z + \frac{R^2}{\rho^2}}} - \frac{R^2}{\rho^2}\cos Z\right\},$$

pour préparer un développement en série suivant les puissances de $\frac{R}{\rho}$, dans lequel on pourra, par hypothèse, s'arrêter après le terme en $\left(\frac{R}{\rho}\right)^3$. Le mieux est d'effectuer le développement du facteur

$$\left[1 - 2\frac{R}{\rho}\cos Z + \frac{R^2}{\rho^2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

jusqu'au terme du second degré,

$$\left[1 - 2\frac{R}{\rho}\cos Z + \frac{R^2}{\rho^2}\right]^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{R}{\rho}\cos Z - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{\rho}\right)^2(3\cos^2 Z - 1),$$

et de le remplacer par ce développement dans l'expression de V :

$$V = \frac{f\mu \,.\, M}{\rho} + f\mu M \,.\, \frac{R^2}{\rho^3} \cdot \frac{3\cos^2 Z - 1}{2}.$$

Il reste à calculer $[V] = \frac{1}{\sigma}\int_\sigma V d\sigma$. Le terme $\frac{f\mu M}{\rho}$ de V est indépendant des coordonnées de $d\sigma$. Le terme correspondant de V est donc

$$\frac{1}{\sigma}\frac{f\mu M}{\rho}\int_\sigma d\sigma = \frac{f\mu M}{\rho}.$$

Quant au second terme de V, il ne dépend de la position de l'élément $d\sigma$ que par l'intermédiaire de cos Z qui y entre aux puissances paires 1 et 2. D'autre part, l'élément $d\sigma$, toutes autres choses égales, est proportionnel à sin ZdZ ou $-d$ cos Z. L'intégrale indéfinie du second terme de V est donc une fonction impaire de cos Z, par les puissances 1 et 3 ; et son intégrale définie, de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, est égale à zéro. Ainsi

$$[V] = \frac{f\mu M}{\rho}$$

et

$$\frac{r-R}{R} = \frac{R^3}{\rho^3}\cdot\frac{M}{m}\cdot\frac{3\cos^2 Z - 1}{2}.$$

Telle est l'expression, en fonction de Z et de ρ, de la hauteur de la marée en parties du rayon terrestre R. Ce résultat se prête mieux à la discussion quand on y exprime Z au moyen des coordonnées équatoriales horaires de l'astre troublant (A, D) par rapport au méridien du point matériel considéré :

$$\cos Z = \sin D \sin\varphi + \cos D \cos\varphi \cos A.$$

Cette substitution donne

$$\frac{r-R}{R} = \frac{3}{4}\frac{M}{m}\cdot\frac{R^3}{\rho^3}\left\{\cos^2 D\cos^2\varphi\cos 2A + \sin 2D \sin 2\varphi \cos A + \frac{(1-3\sin^2 D)(1-3\sin^2\varphi)}{3}\right\}.$$

La hauteur de la marée est indépendante du coefficient d'attraction f et de la masse μ du point considéré. Elle est proportionnelle au rapport de la masse de l'astre troublant à la masse de la

Terre. Pour un même astre de coordonnées données, et le long d'un même parallèle terrestre, elle est en raison inverse du cube de la distance de l'astre à la Terre. — A un même instant, l'expression de la hauteur de la marée ne change pas quand on remplace A par $(\pi + A)$ et φ par $-\varphi$: la hauteur de la marée est la même à chaque instant en deux points antipodes. En particulier, elle est maximum aux deux points qui ont l'astre au zénith et au nadir ; elle est minimum aux points qui ont l'astre dans l'horizon : la surface libre appartient à une surface voisine d'un ellipsoïde dont le grand axe a la direction géocentrique de l'astre troublant. — Enfin, en chaque point terrestre, la hauteur de la marée varie avec le temps par l'intermédiaire de cette distance et des trois termes entre accolades. Dans ces termes, la variation la plus rapide est due à A.

1. Le terme $\cos^2 D \cos^2\varphi \cos 2A$ aurait la même période que $\cos 2A$ si D était constant : il est donc à peu près vrai de dire qu'il est périodique avec, pour période, la moitié du temps nécessaire à A pour augmenter de 360°, ou un demi-jour lunaire ou solaire suivant que l'astre est la Lune ou le Soleil : la partie de $(r - R)$ due à ce terme est la *marée semi-diurne* (lunaire ou solaire). Il est maximum pour $A = 0$, $A = 180°$, c'est-à-dire aux instants des passages supérieurs et inférieurs de l'astre dans le méridien. De plus, pour un même A, ce terme est d'autant plus grand que D est plus voisin de zéro : parmi les marées solaires semi-diurnes d'une année, les deux marées équinoxiales sont les plus importantes. Toutes autres choses égales, ce terme est maximum pour $\varphi = 0$, et la marée semi-diurne se fait surtout sentir dans le voisinage de l'équateur.

2. Le terme $\sin 2D \sin 2\varphi \cos A$ est à peu près périodique comme $\cos A$: il est à peu près vrai de dire qu'il a pour période le temps nécessaire à A pour augmenter de 360°, le jour lunaire ou solaire ; la partie de $(r - R)$ due à ce terme est la *marée diurne* (lunaire ou solaire). Il est maximum pour $A = 0$ ou $A = 180°$, à l'instant du passage de l'astre dans le méridien supérieur, ou à l'instant de son passage dans le méridien inférieur,

suivant que le coefficient sin 2D sin 2φ est positif ou négatif. De plus, ce terme s'annule pour D = 0, ainsi que, d'autre part, pour φ = 0 ou 90° : l'onde diurne se fait surtout sentir aux latitudes moyennes (φ = ± 45°).

3. Le terme $(1 - 3\sin^2 D)(1 - 3\sin^2 \varphi)$ a la même période que sin D : il correspond à une *onde lunaire semi-mensuelle,* à une *onde solaire semi-annuelle.* Le facteur $(1 - 3\sin^2 D)$ est toujours positif et le terme est positif ou négatif en même temps que $(1 - 3\sin^2 \varphi)$, c'est-à-dire suivant que la latitude φ est intérieure ou extérieure à l'intervalle $\pm$ arc sin $\sqrt{\frac{1}{3}}$, ou, à peu près, ± 35°.

La marche à suivre pour une Terre qui n'est que partiellement couverte d'eau est la même, sauf à n'étendre les intégrales

$$\frac{1}{\sigma}\int_{\sigma} V d\sigma$$

qu'à la surface liquide σ. Ceci s'applique aux océans en décomposant la surface de ceux-ci en éléments Δσ suffisamment petits et en calculant

$$\frac{1}{\sigma}\Sigma V \Delta\sigma.$$

On retrouve les mêmes conclusions sur l'influence de la masse et de la distance de l'astre troublant, et trois termes correspondant à ceux qui viennent d'être discutés. Ils admettent respectivement les mêmes périodes, avec un décalage, avance ou retard, qui est fonction de la latitude du lieu et de la déclinaison de l'astre.

Dans les applications, on doit considérer à la fois l'influence du Soleil et de la Lune : la marée vraie est *luni-solaire.* Le potentiel résultant est la somme des deux potentiels distincts, et la marée luni-solaire est, par conséquent, à chaque instant, la superposition de la marée lunaire et de la marée solaire. Toutes autres choses égales, la somme de ces termes est maximum quand les deux astres sont en conjonction ou en opposition : ce sont les marées de syzygies, ou *marées de vives eaux ;* et cette somme est minimum quand les deux astres sont en quadrature : ce sont les *marées de*

morte eau. Les plus fortes marées de l'année sont donc les marées des syzygies dans le voisinage de l'équinoxe.

Théorie dynamique. — Mais ces phénomènes, au lieu de ne présenter, par rapport aux instants des configurations astronomiques correspondantes, que le petit décalage dont il vient d'être parlé, ne se réalisent, sur nos côtes, qu'environ 36 heures après ces configurations. C'est que nous avons raisonné comme si les mouvements célestes étaient assez lents pour que la forme d'équilibre de la mer pût se réaliser à chaque instant. Sauf pour les ondes à longue période, il n'en est pas ainsi, et la *théorie statique* des marées doit faire place à une *théorie dynamique*. Celle-ci, qui ne peut être exposée ici, va être réduite, sans essai de calculs, à l'application de son principe à un cas très particulier.

Considérons un canal de section rectangulaire et de profondeur constante H, creusé à la surface de la Terre, le long de l'équateur. Remplaçons l'action continue de l'astre troublant, que nous supposerons dans l'équateur, par des impulsions très rapprochées ; d'après la théorie statique, une impulsion déterminée provoquera, dans le canal, deux intumescences diamétralement opposées, qui se propageront ensuite librement avec la vitesse $\sqrt{gH + \epsilon}$, comme l'enseigne l'hydrodynamique, où ϵ est négligeable pourvu que la hauteur de l'onde soit faible vis-à-vis de H. Dans l'intervalle, θ secondes, de deux impulsions consécutives, la longitude du Soleil varie de $\left(\frac{360}{24} \cdot \theta\right)''$, sa projection sur la Terre avance de $\frac{2\pi R}{24 \times 60^2} \cdot \theta$, et l'onde progresse de $\theta \sqrt{gH}$. Si la profondeur H était précisément H_0 telle que

$$\sqrt{gH_0} \cdot \theta = \frac{2\pi R}{24 \times 60^2} \cdot \theta,$$

condition indépendante de θ, chaque nouvelle onde formée se superposerait à toutes les précédentes et l'onde résultante deviendrait énorme : le terme négligé ϵ seul l'empêcherait de croître indéfiniment ; on en déduit que l'onde est d'autant plus grande

que la vitesse de la projection terrestre du Soleil est plus proche de la vitesse de propagation de l'onde libre propre au canal de profondeur H.

Substituons à l'océan une couche liquide de profondeur H, découpée par des cloisons étanches en canaux parallèles à l'équateur ; dans l'un quelconque, de latitude φ, la célérité de l'onde libre sera toujours $\sqrt{gH}$, mais les intumescences dues aux impulsions solaires se produiront à des distances $\frac{2\pi R}{24 \times 60^2} \cdot \theta \cdot \cos \varphi$, et les grandes ondes se formeront à des latitudes φ (nord et sud) liées à H par la relation

$$\sqrt{gH} = \frac{2\pi R}{24 \times 60^2} \cdot \cos \varphi.$$

Quelle que soit la profondeur H attribuée à la mer, pourvu que non supérieure à $H_0 = \left(\frac{2\pi R}{24 \times 60^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{g}$, ces latitudes existent toujours ; de part et d'autre de leurs parallèles, les amplitudes vont en décroissant, symétriquement par rapport à l'équateur.

La profondeur H_0 est de 21 880 m. ; pour la Lune un calcul analogue donnerait environ mille mètres de moins. Comme l'océan n'atteint nulle part ces profondeurs, on peut dire, malgré l'étroitesse des hypothèses, qu'il se passe quelque chose de semblable aux conclusions d'une analyse appuyée sur ces considérations. Les ondes diurnes et semi-diurnes lunaire et solaire se forment principalement dans la partie sud des Océans Pacifique, Atlantique et Indien, et se propagent dans les trois canaux méridiens compris entre les terres continentales prises deux à deux : les terres océaniennes et l'Asie, et les deux Amériques ; les deux Amériques, et l'Afrique et l'Europe ; l'Afrique, et les terres océaniennes. L'observation retrouve les ondes à courtes périodes, avec le retard correspondant à la durée de cette propagation.

102. RIGIDITÉ DE LA TERRE

Élasticité des solides. — Toute petite déformation apportée en un point d'un solide provoque en ce point des *efforts* dont les composantes sont des fonctions des éléments de cette déformation. En un point déterminé du solide, et dans le cas le plus général, ces fonctions s'écrivent au moyen de 36 coefficients distincts. Ces coefficients sont des constantes ou des fonctions des coordonnées du point considéré suivant que le solide est ou n'est pas *homogène*. En outre, lorsque la constitution du solide présente, autour de chacun de ses points, une certaine *symétrie*, le nombre des coefficients distincts diminue, soit que certains s'annulent, soit que ces conditions nouvelles les unissent par certaines relations. Cette réduction du nombre de coefficients est la plus grande lorsque le solide homogène est *isotrope*, c'est-à-dire lorsque sa constitution, autour de chacun de ses points, est la même dans toutes les directions. Les constantes d'élasticité se réduisent alors à *deux coefficients distincts*. Ainsi, en un point quelconque d'un solide homogène et isotrope, les efforts intérieurs dus à une petite déformation s'expriment en fonction des éléments de celle-ci, au moyen de deux coefficients λ et μ. En particulier, dans ce cas, les efforts qui se développent dans des plans perpendiculaires aux axes coordonnés (rectangulaires) s'expriment au moyen du seul coefficient μ. Celui-ci est homogène à une force divisée par une surface. Par exemple, dans le système C. G. S., pour l'acier $\mu = 7{,}7 \times 10^{11}$ dynes par cm^2, et pour le verre $\mu = 2{,}4 \times 10^{11}$ dynes par cm^2. Le coefficient μ augmente avec la *rigidité* du solide : on devrait considérer $(1 : \mu)$ comme nul dans le cas d'une indéformabilité parfaite.

Hypothèse provisoire de l'homogénéité de la Terre. — La Terre ne possède évidemment pas cette rigidité absolue. Nous allons d'abord raisonner comme si elle était assimilable à un corps homogène, isotrope et incompressible.

1. La Terre élastique, dans sa partie solide aussi bien que dans

sa partie liquide, subit, de la part du Soleil et de la Lune, des attractions qui diffèrent de l'un à l'autre de ses points. La sphéroïde terrestre doit donc présenter, comme les eaux qui le couvrent partiellement, des *marées* que le manque de points de repère nous empêche seul de ressentir directement. Ainsi, les dénivellations de la surface libre de la mer enregistrées par les marégraphes ne représentent que *l'excès des marées océaniques sur les marées terrestres*. Or les marées océaniques se calculent, comme il a été étudié dans le n° précédent. On peut donc retrouver les périodes et les amplitudes des ondes de marée du sphéroïde terrestre. Mais les caractéristiques de ces ondes sont des fonctions, que permet d'écrire la *Théorie de l'Élasticité*, du coefficient μ défini ci-dessus. Le rapprochement de ces expressions théoriques et des résultats d'observation fait naître des équations en μ. On trouve ainsi une valeur de μ voisine de celle qui est propre à l'acier.

2. L'étude de la rotation d'un corps solide de révolution, parfaitement rigide et soumis à des actions extérieures, montre que l'axe instantané de rotation décrit à l'intérieur du corps un mince cône de révolution, avec une période qui s'écrit simplement au moyen des moments principaux d'inertie du corps considéré. L'application de cette théorie à la rotation de la Terre fournit, pour ce mouvement, une période de dix mois. Or, la variation périodique de l'axe de rotation de la Terre, par rapport à celle-ci, a pour conséquence directe, toutes autres choses égales, une *variation périodique dans la latitude* de chacun de ses points. L'observation retrouve cette variation, mais avec une période de quatorze mois. — D'autre part, la même théorie de la rotation d'un solide de révolution, étendue au cas d'un solide déformable, montre que la période du mouvement de l'axe s'allonge d'autant plus que le coefficient μ est moindre, ou que le solide est moins rigide. Les quatorze mois dont témoigne pour cette période l'observation des latitudes permettent donc d'écrire, pour la Terre, une nouvelle équation en μ ; cette équation donne un coefficient μ voisin, comme celui de l'acier, de 8×10^{11} dynes par cm^2.

3. La déformation du sphéroïde terrestre sous l'attraction luni-solaire est une cause de déviation de la verticale. Celle-ci subit un mouvement périodique dont les caractéristiques s'expriment au moyen du coefficient μ de la Terre supposée homogène, isotrope et incompressible. Nous savons que ces mouvements périodiques de la verticale sont observés et enregistrés. Ainsi, la confrontation des résultats d'observation et des expressions théoriques fournit de nouvelles équations en μ.

Le problème de la rigidité de la Terre. — La Terre n'est pas homogène, et les considérations qui précèdent n'ont été faites dans cette hypothèse que pour simplifier le langage. Elles devraient être étendues au cas de telle ou telle loi dans la variation de la densité des couches ellipsoïdales en fonction, par exemple, de leur demi-grand axe. Mais rien, ou presque rien, ne guide dans le choix de cette loi, et, dans son état actuel, la question de la rigidité de la Terre peut se schématiser dans l'*énoncé* suivant :

Se proposer une loi simple de la variation des couches terrestres ellipsoïdales, avec, par exemple, m coefficients distincts ; écrire les n équations que doivent vérifier ces coefficients eu égard

1° aux valeurs connues de la densité moyenne et de la densité superficielle,

2° à la compatibilité de l'aplatissement terrestre tel qu'il est mesuré par les géodésiens, et tel qu'il résulte des calculs de la procession,

3° à la compatibilité des valeurs des coefficients d'élasticité obtenues par les trois méthodes indiquées ci-dessus,

4° à la compatibilité des valeurs des coefficients d'élasticité obtenues par chacune de ces trois méthodes et de celles qui résultent de l'étude et de l'observation de la propagation des *ondes sismiques,* formes diverses des tremblements de terre.

Si le nombre m de coefficients inconnus l'emporte sur le

nombre n des équations de conditions, il y aura indétermination. — Si m est égal à n, on obtiendra une valeur déterminée pour chacun des coefficients : détermination illusoire, bien entendu, au milieu d'une foule de causes d'erreurs dans les hypothèses de départ et d'erreurs d'observation. — On devra donc laisser m nettement inférieur à n, et c'est à la Théorie des Erreurs qu'on aura recours pour le calcul des valeurs les plus avantageuses des inconnues, et des approximations de ces valeurs.

CHAPITRE III

LES ÉTOILES

103. LA GRANDEUR DES ÉTOILES

Les étoiles visibles à l'œil nu sont au nombre de 5000 environ. Elles sont classées d'après leur *éclat* en six *grandeurs :* on compte

	20	65	190	425	1100	3200
étoiles de	1ère	2me	3me	4me	5me	6me

grandeur respectivement. Ce classement a été prolongé jusque la 15me grandeur pour les étoiles télescopiques. On estime à une trentaine de millions le nombre des étoiles visibles dans les instruments modernes.

La grandeur d'une étoile s'évalue soit par *vision directe,* en comparant son éclat à celui d'une étoile assez voisine sur la grandeur de laquelle les observateurs se sont mis d'accord, — soit au moyen du *photomètre,* — soit *photographiquement,* par le temps de pose nécessaire, ou par le diamètre de l'image après un temps de pose déterminé.

Les mesures photométriques ont permis de *préciser* la notion de grandeur (ou de *magnitude*) d'une étoile. Soit une source lumineuse d'éclat apparent E ; appelons sa grandeur *m* une quantité de signe contraire à la mesure de l'impression correspondante. On sait par la physiologie que si les éclats croissent en progression

géométrique, les impressions croissent en progression arithmétique ; par conséquent

$$m = \text{colog E}$$

dans un certain système de logarithmes. Ce système a été choisi de manière que $m = 6$ soit la grandeur des étoiles encore tout juste visibles à l'œil normal. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que, la grandeur augmentant d'une unité, l'éclat diminue dans le rapport de $10^{0,4}$ à l'unité. Le système de logarithmes est donc celui qui a pour base $10^{0,4}$, et, *désormais en logarithmes décimaux,*

$$-0,4\,m = \log \text{E} \qquad \text{ou} \qquad m = 2,5 \text{ colog E}.$$

Pour deux étoiles d'éclats E et E′, de grandeurs m et m' :

$$m - m' = 2,5\,(\log \text{E}' - \log \text{E}).$$

Adoptons pour unité d'éclat et pour unité de grandeur l'éclat et la grandeur d'*Aldébaran*, étoile α du groupe d'étoiles appelé constellation du *Taureau ;* faisant m' et E′ égaux à l'unité,

$$m = 1 - 2,5 \log \text{E}.$$

La magnitude d'une étoile est *positive, nulle* ou *négative* suivant que le rapport de son éclat à celui d'Aldébaran est inférieur, égal ou supérieur à $10^{0,4} = 2,512$. Ainsi la magnitude de *Sirius,* étoile α de la constellation du *Grand Chien*, est — 1,4 ; ceci signifie que l'éclat de Sirius est à celui d'Aldébaran dans le rapport de $10^{24 : 25}$ ou de 9,1 à l'unité. La magnitude du Soleil est — 26,5.

104. CONSTELLATIONS

On imagine les étoiles distribuées en groupements apparents appelés *constellations*. Chaque constellation porte un nom qui ne rappelle son aspect que d'une manière extrêmement vague. Dans chaque constellation, les étoiles les plus brillantes portent chacune une lettre grecque, et les autres étoiles portent chacune un numéro; de plus, des noms spéciaux ont été donnés aux plus belles étoiles du ciel : ainsi, *Sirius* est l'étoile α de la constellation du *Grand Chien*.

On sait que les *étoiles circompolaires* pour un lieu sont celles qui restent toujours au-dessus de l'horizon de ce lieu : ce sont celles dont la distance polaire, de même nom que la latitude, est moindre que celle-ci. Les demi-droites qui vont de l'œil de l'observateur aux étoiles circompolaires pour un lieu sont à l'intérieur d'un cône de révolution autour de l'axe du monde, de demi-ouverture égale à la latitude du lieu, et reposant sur l'horizon par la génératrice située dans le méridien inférieur.

A chacun des pôles, toutes les étoiles de l'hémisphère équatorial de même nom sont circompolaires ; en un point de l'équateur, aucune étoile n'est circompolaire.

Pour les points de latitude nord supérieure à 45°, les principales constellations circompolaires sont

la GRANDE OURSE,
la PETITE OURSE (α, *Étoile Polaire*),
CASSIOPÉE,
le DRAGON,
CÉPHÉE ;

les trois premières sont coupées par le méridien des équinoxes.

Le mouvement diurne amène au-dessus de l'horizon d'un point terrestre quelconque toutes les étoiles de l'hémisphère équatorial de même nom que la latitude de ce point, plus les étoiles de l'autre hémisphère de déclinaison moindre que la colatitude du lieu. Il n'y a aucune pareille étoile pour chacun des pôles ; elles remplissent toutes cette condition pour chaque point de l'équateur. Toutes les constellations du *zodiaque* sont ainsi visibles jusqu'aux latitudes de 57° environ ; ce sont, parcourues par le Soleil pendant

le printemps, le BÉLIER, le TAUREAU (α, *Aldébaran*), les GÉMEAUX (α, *Castor* ; β, *Pollux* ; solstice d'été) ;

l'été, le CANCER, le LION (α, *Régulus*), la VIERGE (α, l'Épi ; équinoxe d'automne) ;

l'automne, la BALANCE, le SCORPION (α, *Antarès*), le SAGITTAIRE (solstice d'hiver) ;

l'hiver, le CAPRICORNE, le VERSEAU, les POISSONS (équinoxe de printemps).

Sur l'équateur, nous rencontrons, en sens inverse du mouvement diurne :

les Poissons (équinoxe de printemps),
Orion (α, *Bételgeuse* ; β, *Rigel* ; γ, *Bellatrix* ; δ, ε, ζ, les *Trois Rois*),
le Petit Chien (α, *Procyon*),
l'Hydre,
la Vierge (équinoxe d'automne),
le Serpent,
l'Aigle (α, *Altaïr*).

Au nord de l'équateur, en dehors du zodiaque et outre les circompolaires citées ci-dessus :

la Chevelure,
le Bouvier (α, *Arcturus*),
la Couronne,
Hercule,
la Lyre (α, *Véga*),
le Cygne (α, *Déneb*),
Pégase,
Andromède.
Persée (α, *Algol*),
le Dauphin.

Au sud de l'équateur, sont encore visibles aux latitudes mi-européennes :

Fomalhaut, ou α du Poisson Austral,
Sirius, ou α du Grand Chien.

Les étoiles constamment invisibles en un lieu sont les étoiles circompolaires pour l'antipode de ce lieu ; ainsi les principales étoiles de l'hémisphère sud toujours invisibles aux latitudes mi-européennes sont :

Achernar, ou α de l'Éridan,
Canopus, ou α du Navire,
α et β du Centaure,
α, β et γ de la Croix du Sud.

Pour apprendre à reconnaître les étoiles, on s'aide d'une *carte céleste ;* on part d'une constellation d'aspect facile à retenir, comme la Grande Ourse, et on y forme, sur la sphère étoilée, des grands cercles en combinant certaines étoiles deux à deux ; les autres constellations se reconnaissent comme coupées par tel de ces

grands cercles, à telle distance angulaire approximative de la constellation de départ : c'est la *méthode des alignements*. Dans l'hémisphère sud, la constellation de départ est la Croix du Sud.

105. DISTANCE DES ÉTOILES

Donnons-nous les coordonnées polaires écliptiques héliocentriques (R_1, G_1, L_1) d'une étoile, et cherchons les coordonnées géocentriques correspondantes (G, L) du même astre.

Le déplacement (ξ, η, ζ) de l'origine des coordonnées s'exprime en fonction de la distance R_s de la Terre au Soleil, et de la longitude géocentrique G_s du Soleil :

$$\xi = R_s \cos G_s , \quad \eta = R_s \sin G_s , \quad \zeta = 0.$$

Le rapport ($R_s : R_1$) étant extrêmement petit, nous pouvons appliquer les formules approchées de parallaxe :

$$G = G_1 - \frac{R_s}{R_1} \sin (G_1 - G_s) \text{ séc } L_1,$$

$$L = L_1 - \frac{R_s}{R_1} \cos (G_1 - G_s) \sin L_1.$$

La parallaxe stellaire est insensible pour un déplacement égal au rayon terrestre, et les coordonnées polaires (G, L) obtenues par ces équations sont aussi bien relatives au rayon stellaire local.

G et L sont variables avec G_s et R_s et ont pour période l'année sidérale ; le rayon stellaire local décrit donc, pendant ce temps, un petit cône autour du rayon dont les coordonnées sont (G_1, L_1).

Pour nous rendre compte de la forme de ce cône, coupons-le par une sphère de rayon 1, ayant pour centre le point d'observation, et faisons une projection de la courbe d'intersection sur un plan repéré par des axes rectangulaires XY, et suivant les relations

$$x = (G - G_1) \cos L_1,$$
$$y = L - L_1.$$

Les équations paramétriques de la courbe représentative du cône sont

$$x = -\frac{R_s}{R_1} \sin (G_1 - G_s),$$

$$y = -\frac{R_s}{R_1} \cos (G_1 - G_s) \sin L_1 ;$$

le paramètre variable est le temps, dont R_s et G_s sont des fonctions. Mais, eu égard à notre but, nous pouvons considérer R_s comme constant ; alors l'élimination du temps se fait avec celle de $(G_1 - G_s)$, et laisse l'équation :

$$x^2 + \frac{y^2}{\sin^2 L_1} = \frac{R_s^2}{R_1^2}.$$

La courbe d'intersection du cône étudié et du plan perpendiculaire à son axe (G_1, L_1) est donc une ellipse dont le grand axe n'est fonction que de la distance R_1 de l'étoile, et est parallèle à l'écliptique ; son petit axe est, de plus, fonction de la latitude de l'étoile, et est perpendiculaire à l'écliptique ; cette ellipse devient circulaire pour une étoile située sur la normale à l'écliptique, et se réduit à un segment rectiligne pour une étoile appartenant à ce plan.

La mesure du grand axe de l'ellipse de parallaxe stellaire. c'est-à-dire de la demi-ouverture maximum du cône de parallaxe stellaire, équivaut à la mesure de la distance R_1 de l'étoile.

Cette demi-ouverture maximum $(R_s : R_1)$ peut être considérée comme la mesure, en radian, de l'angle sous lequel on verrait à la distance de l'étoile au Soleil, un segment rectiligne transversal de longueur égale à la distance moyenne de la Terre au Soleil ; aussi, cette parallaxe stellaire $(R_s : R_1)$ est-elle ordinairement exprimée en secondes. Une parallaxe d'une seconde correspond à une distance de $\frac{360 \times 60 \times 60}{2\pi} = 206\,265$ rayons moyens de l'orbite terrestre.

Le mouvement apparent des étoiles dû à la parallaxe annuelle (déduction faite d'une apparence analogue due à l'aberration) n'a

pu être observé que pour un petit nombre d'étoiles, les plus rapprochées du système solaire.

Les distances des étoiles s'expriment soit par leurs parallaxes, soit par le nombre d'années nécessaires à la lumière pour franchir ces distances ; une *année de lumière* équivaut à 9 467 280 000 000 km.

Les étoiles les plus rapprochées du système solaire sont, par ordre des distances croissantes :

α Centaure	parallaxe	0″,815 ;	4,0 années,	
61 Cygne	»	0,445 ;	7,3	»
η Hercule	»	0,400 ;	8,1	»
Sirius	»	0,336 ;	9,7	»
Procyon	»	0.322 ;	10,1	»
β Centaure	»	0,322 ;	10,1	»
ν Dragon	»	0,320 ;	10,2	»
η Cassiopée	»	0,285 ;	11,4	» , etc.

L'une des étoiles de moindre parallaxe mesurée est δ Petit Cheval : sa parallaxe (0″,017) donne une distance de 191 années. On propose (?) 3000 années comme distance des plus faibles étoiles télescopiques.

106. ÉTOILES DOUBLES ET MULTIPLES

L'observation de deux étoiles dont la distance angulaire est très petite fait souvent découvrir leur rotation l'une autour de l'autre : un pareil système s'appelle une *étoile double*. Un ensemble analogue, mais à plus de deux étoiles, est une étoile multiple.

On connaît plus de 10 000 étoiles doubles ; δ Petit Cheval est une étoile double dont la durée de révolution est 11 ans ; de même γ Vierge, avec une durée de révolution de 180 ans ; etc.

Les étoiles multiples sont plus rares : ε Lyre est quadruple, θ Orion est sextuple.

Dans l'observation des étoiles doublès, on relève, à intervalles convenables, les différences des coordonnées polaires des étoiles composantes. Par rapport à l'une de celles-ci, par exemple la plus

brillante, considérée comme immobile, on peut ainsi étudier l'orbite apparente de l'étoile satellite : cette orbite apparente est la perspective de l'orbite réelle sur un plan perpendiculaire à la direction de l'étoile principale.

1° L'orbite apparente de l'étoile satellite est parcourue suivant la loi des aires par rapport à l'étoile principale.

2° L'orbite apparente est une ellipse dans laquelle l'étoile principale occupe une position quelconque.

Il résulte du premier résultat que la résultante des forces appliquées à l'étoile satellite, dans le système lié à l'étoile principale, rencontre constamment la direction de celle-ci à la Terre. Mais il en est ainsi pour toutes les étoiles doubles, et comme ces systèmes sont indépendants de leur position par rapport à la Terre, la résultante des forces appliquée à l'étoile satellite passe nécessairement par l'étoile principale elle-même.

Pour trouver la nature de cette force, admettons qu'elle n'est fonction que de la distance de l'étoile satellite à l'étoile principale.

Nous savons par la mécanique qu'il n'y a alors que deux lois de forces centrales capables de faire décrire une conique au mobile qui y est soumis ; à savoir :

1° une attraction proportionnelle à la distance ;

2° une attraction inversement proportionnelle au carré de la distance.

Dans le premier cas, le point attirant occupe le centre de la conique ; l'étoile principale occuperait le centre de l'orbite apparente ; il n'en est pas ainsi, et ce cas doit être exclu.

Les forces émanées des étoiles agissent donc en raison inverse du carré des distances, comme les forces qui émanent des astres du système solaire. La loi d'attraction que nous avions découverte dans ce système s'étend donc à l'univers entier ; et on ne s'était pas trompé en lui donnant, dès alors, le nom d'attraction universelle.

L'orbite réelle de l'étoile satellite est une ellipse dont l'étoile principale occupe un foyer. L'orbite apparente étant connue, la détermination de l'orbite réelle consiste dans la résolution du problème suivant : on donne, dans un plan, la projection d'une

ellipse de l'espace, et l'un des foyers de cette ellipse ; on demande l'ellipse de l'espace.

Ce problème admet évidemment deux solutions symétriques par rapport au plan de projection.

Une variation périodique des coordonnées de Sirius et de Procyon a fait attribuer à chacune de ces étoiles un *compagnon obscur,* avec des révolutions de 50 années environ. Le compagnon de Sirius a, depuis, été observé ; son éclat n'est que la 0,0001 partie de celui de l'astre principal.

Le rapport, à la masse du Soleil, de la masse totale d'une étoile double se déduit de la durée de la révolution et du grand axe de l'ellipse décrite ; celui-ci est connu par l'orbite apparente et la parallaxe annuelle de l'étoile. La masse du système de Sirius est d'environ cinq fois celle du Soleil.

107. ÉTOILES VARIABLES. ÉTOILES TEMPORAIRES

L'éclat de certaines étoiles n'est pas constant ; pour quelques-unes, ces variations sont périodiques ; ainsi, l'éclat de *Mira Ceti* ou o Baleine a une période de 11 mois et passe de la onzième à la deuxième grandeur : *Algol* ou α Persée est de la deuxième grandeur pendant 2 j. 12 h., puis son éclat varie pendant 9 h. en descendant jusqu'à la quatrième grandeur, ce minimum durant 18 minutes. Dans un grand nombre de cas, la période de diminution de l'éclat est plus longue que la période d'accroissement.

Ces phénomènes sont inexpliqués ; on a proposé, pour les affaiblissements d'éclat d'Algol, le passage périodique, entre l'étoile et nous, d'un satellite obscur ; on a proposé aussi la combinaison de taches dont la formation serait périodique (comme celles du Soleil) et d'une rotation convenable de l'étoile.

Comme tout phénomène périodique (marées, variation des latitudes,...) les variations d'éclat des étoiles s'étudient au moyen de l'*analyse harmonique*. Celle-ci consiste dans le développement d'une fonction (démontrée ou empirique suivant que les causes

du phénomène sont connues ou inconnues) en termes *sinus* et *cosinus* de variables proportionnelles au temps et dont les périodes individuelles sont des sous-multiples de plus en plus petits de la période résultante observée, et dans le calcul des coefficients de ces termes. Pour un même ensemble d'observations, les termes nécessaires sont d'autant plus nombreux qu'on croit pouvoir exprimer l'approximation par un nombre plus petit.

Parfois, des étoiles apparaissent brusquement, et, ou bien s'éteignent, — ce sont les étoiles *temporaires,* — ou bien restent visibles, mais après avoir perdu la plus grande partie de leur éclat, — ce sont les étoiles *nouvelles.*

Quelques apparitions d'étoiles nouvelles sont célèbres ; nous citerons quelques exemples récents. En 1866, une étoile de deuxième grandeur apparut dans la Couronne, et descendit bientôt à la neuvième grandeur. En 1876, ce fut, dans le Cygne, une étoile de troisième grandeur, aujourd'hui à peine visible dans les instruments les plus puissants. En décembre 1891, une étoile de quatrième grandeur se montra dans le Cocher, et perdit son éclat jusqu'à la seizième grandeur. En février 1901, une étoile naquit dans Persée, atteignit la troisième grandeur en quelques heures, et la première grandeur en deux jours ; en six mois elle repassait à la septième grandeur et elle est de douzième grandeur depuis juillet 1903.

108. AMAS ET NÉBULEUSES

La *voie lactée* est un immense amas d'étoiles dégageant une lumière blanchâtre et dont l'ensemble seul frappe l'œil ; elle fait le tour du ciel, à peu près dans un plan *(équateur galactique)* incliné de 50° sur l'équateur ; sur la sphère étoilée, elle traverse le Cocher, Persée, Cassiopée, le Cygne, l'Aigle...

En dehors de la voie lactée, il y a de nombreux *amas* isolés ; le principal est l'amas des *Pléiades* dans lequel la vision directe aperçoit six ou sept étoiles, tandis que le télescope en découvre

plus de quatre cents ; il est coupé par l'écliptique, entre le Bélier et le Taureau. Citons encore l'amas d'Andromède, visible à l'œil nu, l'amas d'Hercule, etc.

Les *nébuleuses* sont des nuages de matière diffuse, fluide lumineux que les instruments les plus puissants ne peuvent résoudre en étoiles. On en compte plus de dix mille. De nombreux objets, pris d'abord pour des nébuleuses, ont été *résolus* en amas. Les nébuleuses proprement dites, nébuleuses *non* résolubles, se trouvent presque toutes dans la voie lactée ou dans son voisinage.

D'après leur forme, on classe les nébuleuses en *nébuleuses planétaires* (circulaires), *nébuleuses elliptiques, nébuleuses spirales*...

La nébuleuse d'Orion, visible à l'œil nu, entoure l'étoile sextuple θ.

L'étoile nouvelle du Cocher, 1891, se transforma en 1892 dans une petite nébuleuse planétaire.

109. SPECTROSCOPIE STELLAIRE

Classification spectroscopique des étoiles. — Les spectres stellaires sont continus, avec des raies généralement obscures, quelquefois brillantes. L'étude du spectre permet le classement des étoiles en un petit nombre de types : la principale division de cette classification définit les étoiles *blanches* ou *bleues,* les étoiles *jaunes,* les étoiles *orangées* ou *rouges.*

Le spectre des étoiles blanches (ou bleues) renferme peu de raies ; la plupart de ces raies sont dues à l'hydrogène, soit obscures et très marquées (Sirius), soit obscures et fines (α Cygne), soit brillantes et accompagnées d'une raie de l'hélium (γ Cassiopée).

Le Soleil est une étoile jaune. Les étoiles de cette classe sont caractérisées par l'abondance des raies métalliques (Arcturus, Aldébaran) et présentent parfois des lignes brillantes très intenses.

Les étoiles rouges (ou orangées) sont définies par les larges bandes obscures et cannelées de leur spectre, soit que ces bandes limitées nettement du côté du violet se dégradent du côté du rouge

(Bételgeuse), soit qu'elles présentent la disposition inverse (ce qui ne s'observe que pour des étoiles télescopiques, ou à la limite de visibilité).

Cette classification correspondrait aux différentes phases de l'évolution stellaire, et les étoiles s'y placeraient dans l'ordre décroissant des températures

Outre l'hydrogène, les éléments qui se reconnaissent le plus fréquemment dans les étoiles sont l'hélium, le fer, le magnésium, le calcium, le sodium, le silicium. — Sauf dans Bételgeuse, les raies de l'hélium sont aussi intenses que les raies de l'hydrogène dans toutes les étoiles d'Orion. — Les raies du fer sont abondantes dans le spectre de Sirius.

Le spectre de certaines étoiles (β Lyre) présente une variation périodique qu'on cherche à expliquer par l'hypothèse d'une étoile double dont les composantes s'éclipseraient tour à tour mutuellement.

La simultanéité de lignes obscures (spectre d'absorption) et de lignes brillantes d'hydrogène (spectre d'émission) est embarrassante : l'émission serait due à une atmosphère incandescente étendue se projetant autour du noyau.

Dans la classe des étoiles jaunes, les lignes brillantes du spectre de certaines étoiles faibles sont dues à un élément inconnu ; l'étude spectroscopique de ces astres les rapproche des nébuleuses ; de plus, comme les nébuleuses, ils s'observent dans la voie lactée ou dans son voisinage.

Le spectre à larges bandes sombres des étoiles rouges est caractéristique des combinaisons chimiques et leur fait attribuer une température inférieure aux températures de dissociation ; on y reconnaît l'oxyde de titane et certaines combinaisons du carbone et de l'hydrogène. Les étoiles rouges sont des étoiles à carbone, accompagné d'hydrogène, de fer, de calcium, de vanadium, de titane, de chrome, etc.

Étoiles doubles spectroscopiques. — Le dédoublement périodique des raies du spectre d'une étoile décèle l'existence de deux

sources lumineuses dont la différence des distances à l'observateur varie périodiquement. Ce phénomène se constate dans le spectre des étoiles connues comme doubles. Dans le spectre d'une étoile non connue comme double, il témoigne du dédoublement de l'astre en des composantes dont la distance angulaire est imperceptible : c'est une *étoile double spectroscopique* (β Cocher). La mesure spectroscopique des vitesses radiales permet le calcul des éléments de l'orbite et de la distance des étoiles doubles.

Étoiles nouvelles. — Le spectroscope répartit les étoiles nouvelles en trois groupes. Les unes sont des étoiles jaunes à raies noires et raies brillantes, et fournissent le spectre des étoiles variables ; d'autres présentent un spectre continu, sans lignes ; enfin, les étoiles nouvelles proprement dites, à apparition brusque, montrent dans leur spectre des lignes noires et brillantes accolées comme si un spectre d'absorption et un spectre d'émission étaient dus aux mêmes éléments, ou comme si, de deux sources voisines ou confondues l'une absorbait, l'autre émettait les mêmes radiations.

En même temps que l'étoile nouvelle du Cocher, 1892, prenait l'aspect d'une petite nébuleuse planétaire, son spectre se réduisait aux raies brillantes caractéristiques des nébuleuses. — Pendant la décroissance de l'éclat de l'étoile nouvelle de Persée, 1901, le spectre continu s'affaiblissait et le spectre d'émission se rapprochait d'un spectre de nébuleuse.

Nébuleuses. — Les fausses nébuleuses, résolubles en étoiles, donnent un faible spectre continu. Le spectre des nébuleuses proprement dites est un spectre non continu d'émission, généralement réduit à quatre raies dont les longueurs d'onde sont 5007, 4959, 4862 et 4341 10^{-4} μ. Les deux dernières raies, dont la seconde est toujours faible, sont des raies d'hydrogène. Les deux premières, les plus brillantes, dans le vert, ne correspondent à aucun élément connu. On donne le nom de *nébulium* à l'élément inconnu auquel on les attribue. Certains spectres comportent aussi quelques raies de l'hélium.

L'extrême simplicité des spectres de nébuleuses peut s'expliquer par la faible densité ou par la basse température de ces astres. Jusque tout récemment on a considéré l'une et l'autre de ces causes comme vraisemblables. Mais certaines nébuleuses présentent aussi un très faible spectre continu dont le maximum d'intensité est dans le vert ; la température de la source variant en raison inverse de la longueur d'onde de ce maximum (qui, pour le Soleil, est, sans correction de l'absorption atmosphérique, dans le jaune), ne faut-il pas conclure, au contraire, à une très haute température des nébuleuses? Pas nécessairement, car, pour une source très faible, l'œil est plus sensible aux radiations plus réfrangibles, et déplace vers le vert le maximum apparent de l'intensité lumineuse.

Dans ces dernières années, l'étude de la grande nébuleuse d'Orion a donné les résultats suivants. D'après les relations qui unissent la largeur d'une raie spectrale, la température et le poids atomique de l'élément incandescent : 1° le *nébulium,* auquel est due la raie verte 5007, est un élément dont le poids atomique est voisin de 3 ; 2° l'élément inconnu qui a reçu le nom d'*archonium,* et auquel est due une raie ultra-violette double 3726-3729, a un poids atomique voisin de 2 ; 3° la température mesurée de la nébuleuse est de 15000°, qu'il faut considérer comme une limite supérieure, toutes les erreurs tendant à accroître le nombre conclu.

110. MOUVEMENTS DES ÉTOILES

Axes de repère. — Jusqu'ici, nous avons considéré le Soleil et les étoiles comme un ensemble indéformable, auquel nous avons donné le nom de *solide stellaire.* Néanmoins, l'observation d'une constellation quelconque pendant une longue suite d'années décèle de très petites variations dans les distances angulaires mutuelles des étoiles et, par suite, dans leurs coordonnées. Ces changements sont trop faibles pour amener, avant un temps fort long, une modification sensible dans l'aspect des constellations,

mais une astronomie d'approximation supérieure ne peut les négliger : la projection sur la sphère étoilée de l'étoile 61 Cygne décrit par année un arc de 5″ ; celle de α Centaure, un arc de 3″,6.

La découverte de ces déplacements des étoiles soulève une objection. Les mouvements célestes ont été rapportés au *solide stellaire ;* maintenant on apprend que ce solide n'existe pas : quels sont donc les axes de repère qu'il faut lui substituer ? Et les mouvements mêmes des étoiles, à quoi sont-ils rapportés ?

Les axes de repère des mouvements célestes sont ceux par rapport auxquels les principes de la mécanique sont vrais ; nous avions pensé jusqu'ici que, dans ce système, les coordonnées des étoiles étaient constantes, et nous en avions déduit une représentation physique ; celle-ci nous échappe aujourd'hui. C'est le principe des aires relatif aux systèmes matériels qui permet de définir le système de repère définitif.

Un système matériel *isolé* est un ensemble de points matériels ne subissant aucune force extérieure. L'ensemble du Soleil, des planètes, des satellites et des comètes constitue-t-il un pareil système ? Rigoureusement non, puisque ces astres subissent l'attraction des étoiles et des nébuleuses. Nous commencerons cependant par le considérer comme tel ; puis nous examinerons en quoi les actions négligées pourraient modifier nos conclusions.

Rappelons le *théorème des aires* pour un système de points matériels : Lorsque le moment résultant des forces extérieures est constamment nul par rapport à un point O, la somme des produits des masses des points matériels par les aires décrites par les projections, sur un plan quelconque, des rayons vecteurs correspondants, issus du point O, varie proportionnellement au temps ; autrement dit, la variation de cette somme, pendant une durée déterminée, comme l'unité de temps, est constante.

On sait que cette proposition subsiste lorsque le point O est mobile, pourvu que ce point soit le centre de gravité du système considéré. La somme des produits des masses par les projections des aires sur un plan quelconque de direction fixe, reste constante pendant l'unité de temps ; mais elle varie avec la direction de ce

plan ; et il existe une orientation du plan de projection pour laquelle cette somme est maximum. L'orientation du *plan du maximum des aires* est invariable par rapport aux axes des principes de la mécanique.

Abstraction faite de l'action des étoiles et des nébuleuses, les conditions de ce théorème se réalisent dans le système solaire, qui n'est alors soumis à aucune force extérieure. Nous allons voir, de plus, que ces conditions subsistent pratiquement lorsqu'on tient compte de l'attraction des masses étrangères au système solaire.

En effet, ces masses sont si éloignées des points qui constituent le système solaire que leurs attractions sur ces points sont sensiblement parallèles et proportionnelles aux masses de ceux-ci. Ces forces extérieures au système se composent donc en une force unique appliquée au centre de gravité du système, et leur moment résultant par rapport à ce point est égal à zéro.

L'application du théorème des aires au système solaire détermine donc dans l'univers la direction d'un *plan invariable ;* cette orientation se calcule en fonction des masses du système solaire, des éléments de leurs orbites et des constantes de leur rotation.

Ici deux cas peuvent se présenter : par rapport aux axes de la mécanique, le mouvement du Soleil est rectiligne et uniforme, ou bien quelconque.

Si le mouvement du Soleil est rectiligne et uniforme (ou nul), nous aurons un système de repère vérifiant les principes de la mécanique en adoptant, par exemple, pour plan XY le plan passant par le centre du Soleil et ayant la direction invariable qui vient d'être définie.

Si le mouvement du Soleil n'est pas rectiligne et uniforme, le système de repère dans lequel le plan XY, par exemple, passant par le centre du Soleil, possède la direction invariable qui vient d'être définie, constitue seulement un système de repère en translation par rapport au système que nous cherchions. Nous verrons ce qu'on peut dire actuellement du mouvement du Soleil.

Quoi qu'il en soit, c'est à ce système de repère que vont se

rapporter les déplacements et les vitesses des étoiles. Complétons sa définition en lui donnant pour origine le centre du Soleil, et pour axe Z la perpendiculaire à la direction plane invariable.

Vitesses des étoiles. — Appelons p la mesure en secondes de la parallaxe annuelle d'une étoile, ψ la mesure dans la même unité de son déplacement angulaire annuel, et a le rayon moyen de l'orbite terrestre. Le déplacement annuel de cette étoile, perpendiculaire à sa direction héliocentrique est, à très peu près,

$$a\,\frac{\psi}{p}\,;$$

d'où, facilement, la vitesse correspondante.

Pour avoir la vitesse vraie de l'étoile, il faut encore connaître sa vitesse dans le sens de sa direction héliocentrique. On sait comment ce problème est résolu par l'examen du spectre et le déplacement des raies dont la longueur d'onde est connue quand la source est au repos. Ainsi, le glissement vers le rouge de la raie F de l'hydrogène dans le spectre de Sirius témoigne de l'éloignement de cette étoile avec une vitesse de 47 km. par seconde. De même, Aldébaran s'éloigne avec une vitesse de 48 km. par seconde.

L'ensemble des observations permet aujourd'hui de reconnaître dans les étoiles deux grands *courants,* qui tendent à diffuser l'un dans l'autre comme le feraient deux courants gazeux qui se pénétreraient.

Vitesses des nébuleuses. — La vitesse radiale d'une nébuleuse se détermine au spectroscope suivant le même principe que la vitesse radiale d'une étoile, sauf une difficulté nouvelle. La raie principale des spectres de nébuleuses appartient à un élément dont la longueur d'onde est inconnue lorsque la source est au repos. Jusqu'ici on a pris pour cette longueur d'onde la moyenne des longueurs d'onde mesurées sur les spectres d'un grand nombre de nébuleuses. On a trouvé des vitesses radiales du même ordre

de grandeur que celles des étoiles. — On peut aujourd'hui reprendre cette étude au moyen de la vraie longueur d'onde de la raie verte des nébuleuses, obtenue dans les belles recherches récentes sur la grande nébuleuse d'Orion.

111. MOUVEMENT DU SOLEIL

Axes de repère. — Les étoiles, qui formaient un ensemble indéformable en première approximation, sont en mouvement chacune par rapport aux autres. Ces déplacements ont été mesurés par rapport à un plan dont l'orientation est invariable ; mais rien ne garantit l'immobilité de ce plan par rapport aux axes des principes de la mécanique.

Supposons d'abord que le Soleil ait un mouvement rectiligne par rapport à l'ensemble des étoiles supposé pour un instant indéformable. Un observateur solaire verrait sur la sphère étoilée les projections de toutes les étoiles décrire des arcs de grands cercles qui, prolongés, se couperaient en deux points diamétralement opposés, points de percée de la direction du mouvement du Soleil par rapport au solide stellaire.

En réalité, il n'en est pas ainsi : les mouvements des étoiles observés de la Terre et corrigés de l'aberration de la lumière et de la parallaxe annuelle, donc rapportés à un observateur solaire, ne vérifient pas cette condition.

Cette recherche cependant n'aura pas été stérile : les arcs décrits sur la sphère étoilée par six des plus brillantes étoiles, — Sirius, Arcturus, Capella, Véga, Aldébaran et Procyon, — appartiennent à des cercles dont les points communs sont confinés dans deux calottes opposées et relativement restreintes de la sphère étoilée. Ceci décèle, par rapport au Soleil, une translation de l'ensemble des étoiles, à laquelle se superpose, pour chacune d'elles, un mouvement particulier ; ou, ce qui est la même chose, un mouvement du Soleil par rapport à des axes qui ne laissent aux étoiles que leurs mouvements particuliers.

C'est de cette dernière façon que l'on préfère s'exprimer. Ainsi, parmi tous les systèmes d'axes que l'expérience permet de considérer comme vérifiant les principes de la mécanique, nous décidons d'adopter ceux par rapport auxquels les étoiles ne possèdent aucune translation d'ensemble, ou, d'une façon plus précise, des axes tels que la somme algébrique des projections des déplacements stellaires sur chacun d'eux soit égale à zéro.

Direction et vitesse du Soleil. — Soumis à l'attraction universelle, le Soleil, comme toute autre étoile, a un mouvement qui n'est ni rectiligne, ni uniforme : cependant, la durée des observations n'a pas encore été assez grande pour que nous puissions faire davantage que considérer seulement la tangente à sa trajectoire, au point qu'il y occupe actuellement, et la vitesse actuelle dans cette direction. Ce n'est qu'après des siècles d'observations que l'on pourra peut-être apprécier le sens et la grandeur des erreurs ainsi commises.

Considérons le vecteur qui, par rapport aux axes qui viennent d'être définis, représente la vitesse actuelle du Soleil ; appelons *apex* le sens de ce vecteur et *antiapex* le sens opposé ; sur la sphère céleste, l'apex et l'antiapex sont les deux traces de la tangente à la trajectoire du Soleil, au point que cet astre y occupe actuellement. Appelons encore *équateur parallactique* le plan mené par le Soleil perpendiculairement à ce vecteur ; sur la sphère étoilée, le grand cercle de même nom a pour pôles l'apex et l'antiapex.

L'apex et l'antiapex appartiennent aux calottes sphériques où se confinent les points d'intersection des grands cercles de cheminement des étoiles ; l'apex appartient à la calotte dont les étoiles s'éloignent. Étudiant la répartition des points d'intersection dans cette calotte, on a obtenu, pour position approchée de l'apex, le point de l'hémisphère nord, voisin de τ Hercule, qui a pour coordonnées stellaires :

$$A = 245°52', \qquad D = 49°48'.$$

Reprenons le problème géométriquement. A l'instant t, soient α, δ, ρ l'ascension droite, la déclinaison et la distance d'une étoile

dont le mouvement a été observé, (x, y, z) les coordonnées rectilignes correspondantes. Représentons par les mêmes lettres accentuées les mêmes coordonnées, polaires et rectilignes, à un autre instant t'.

Nous pouvons exprimer x, y, z, x', y', z', et, par suite,

$$\Delta x = x' - x, \qquad \Delta y = y' - y, \qquad \Delta z = z' - z,$$

en fonction de α, δ, ρ, α', δ', ρ' et de

$$\Delta\alpha = \alpha' - \alpha, \qquad \Delta\delta = \delta' - \delta, \qquad \Delta\rho = \rho' - \rho.$$

$\Delta\alpha$, $\Delta\delta$, $\Delta\rho$ sont des quantités petites, dont nous négligerons les carrés et les produits. Inversement, nous obtiendrons :

$$\cos\delta \cdot \Delta\alpha = -\frac{\sin\alpha}{\rho}\Delta x + \frac{\cos\alpha}{\rho}\Delta y,$$

$$\Delta\delta = -\frac{\cos\alpha\sin\delta}{\rho}\Delta x - \frac{\sin\alpha\sin\delta}{\rho}\Delta y + \frac{\cos\delta}{\rho}\Delta z,$$

$$\Delta\rho = \cos\alpha\cos\delta\,\Delta x + \sin\alpha\cos\delta\,\Delta y + \sin\delta\,\Delta z.$$

Chaque expression Δx, Δy, Δz est la somme de deux termes dont l'un est dû au déplacement du Soleil, l'autre au mouvement propre de l'étoile; ces mouvements propres se font, par définition des axes de repère, indifféremment dans toutes les directions, et les termes qui en résultent ont le caractère d'erreurs accidentelles : nous pourrons les négliger d'autant plus sûrement que nous appliquons les équations à un plus grand nombre d'étoiles. Δx, Δy, Δz sont donc maintenant des quantités égales et opposées aux composantes du déplacement solaire dans l'intervalle $(t' - t)$.

Les premiers membres des deux premières équations sont les composantes du déplacement de l'étoile suivant son parallèle et son méridien ; leurs valeurs se déduisent des observations.

L'application de ces deux premières équations à un grand nombre n d'étoiles fournit un système de $2n$ équations à trois inconnues Δx, Δy, Δz, et d'où l'on tire les meilleures valeurs de ces quantités.

Si d, A et D sont respectivement le déplacement du Soleil dans l'intervalle $(t' - t)$, l'ascension droite et la déclinaison de l'apex,

$$\Delta x = d \,.\, \cos A \cos D,$$
$$\Delta y = d \,.\, \sin A \cos D,$$
$$\Delta z = d \,.\, \sin D.$$

L'élimination de d laisse deux équations en A et D.

On a trouvé par cette méthode :

$$A = 259°12', \qquad D = 32°7',$$

point situé entre λ et π Hercule.

Nous n'avons pas fait usage de l'expression de $\Delta\rho$. Appliquons-la à n étoiles dont les $\Delta\rho$ ont été mesurés au moyen du spectroscope. Nous aurons un système de n équations à trois inconnues Δx, Δy, Δz. Des meilleures valeurs de celles-ci, nous déduisons, si t' est plus grand que t,

$$\frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}{t' - t},$$

qui est la vitesse du Soleil.

Les résultats oscillent de 12 à 40 km. par seconde. La vitesse la plus approximative paraît comprise entre 16 et 20 km.

Le rapprochement d'un très grand nombre de recherches, soit d'après la méthode ci-dessus, soit d'après des méthodes qui n'assimilent pas les mouvements propres à des erreurs accidentelles, justifie les conclusions suivantes :

1° Le Soleil se déplace actuellement vers un point de la sphère étoilée à peu près à égale distance de Véga et de α Ophiuchus, et très voisin du petit triangle formé par les étoiles de quatrième grandeur μ, ξ, et ο Hercule.

2° La vitesse de ce déplacement est d'environ 18 km. par seconde.

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE V

PRÉLIMINAIRES

1. *Segments et angles rectilignes* 1
Segment rectiligne. — Droite dirigée. — Signe d'un segment rectiligne. — Angle. — Plan orienté. — Signe d'un angle. — Angles successifs.

2. *Unités de mesure des angles* 4
Degré. — Grade. — Heure. — Radian. — Changement d'unité.

3. *La mesure des grandeurs* 6

4. *Développements en série* 7
Fonction d'une variable. — Fonction de plusieurs variables.

5. *Fonctions expérimentales. — Fonctions tabulaires. — Interpolation* 10

6. *Coordonnées d'une direction* 13
Axes coordonnés. — Coordonnées polaires d'une direction. — Cosinus directeurs. — Angle de deux directions.

7. *Le cône et le plan* 16
Équation d'un cône dont le sommet est à l'origine. — Recherche de l'axe et de l'ouverture. — Cône déterminé par trois directions. — Intersection de deux cônes. — Équation d'un plan passant par l'origine. — Angle de deux plans. — Plan déterminé par deux directions. — Intersection d'un cône et d'un plan. — Intersection de deux plans.

8. *La sphère céleste* 21

9. *Coordonnées polaires du point* 21

10. *Le problème de la parallaxe* 22
Problème général. — Cas particulier. — Définition.

11. *Transformation des coordonnées rectilignes* 25
Problème théorique. — Problème inverse. — Circonstances usuelles. — Cas particulier. — Problème pratique. — Remarque. — Rotations successives. — Cas particulier.

12. *Transformation des coordonnées polaires* 31
13. *Instruments astronomiques visuels* 33
Instruments primaires. — Instruments binaires. — Instruments ternaires.
14. *Division de ce cours* 45

PREMIÈRE PARTIE

COORDONNÉES LOCALES

CHAPITRE PREMIER

Coordonnées horizontales

15. *La verticale* 47
16. *Coordonnées horizontales* 48
Axes coordonnés. — Coordonnées polaires.
17. *Instruments* 49
Théodolite. — Sextant. — Astrolabe à prisme.
18. *Mouvement diurne* 51
Lois du mouvement diurne. — Étoiles. — Axe du monde. — Jour sidéral.
19. *La méridienne, origine des azimuts* 55
Méridien. — Méridienne. — Points cardinaux. — Origine des azimuts
20. *Détermination de la méridienne et de l'axe du monde* . . . 57
Cas général. — Cas particulier.
21. *Problèmes sur le mouvement diurne* 58
22. *Limite inférieure des distances des étoiles* 67

CHAPITRE II

Coordonnées équatoriales horaires

23. *L'équateur céleste* 70
24. *Coordonnées équatoriales horaires* 70
Axes coordonnés. — Coordonnées polaires. — Coordonnées horaires et coordonnées horizontales.
25. *Équatorial* 72

CHAPITRE III

Coordonnées équatoriales stellaires

26. *Coordonnées équatoriales stellaires* 73
Axes coordonnés. — Coordonnées polaires.
27. *Équatorial à mouvement diurne* 74
28. *Temps sidéral* 74
29. *Angle horaire et ascension droite* 75
Notations. — Théorème. — Corollaires. — Application.
30. *Instruments méridiens* 77

DEUXIÈME PARTIE

COORDONNÉES GÉOCENTRIQUES

CHAPITRE PREMIER

La Terre

31. *Le géoïde* 83
32. *Le géoïde sphérique* 84
Horizons.
33. *Coordonnées équatoriales terrestres* 86
Axes coordonnés. — Coordonnées polaires.
34. *Latitude et hauteur du pôle* 88
Théorème. — Détermination de la latitude. — Mouvement diurne.
35. *Théorème des longitudes* 91
Lemme. — Théorème des longitudes.
36. *Transport des systèmes de coordonnées au centre de la Terre* . 93
Coordonnées locales ou apparentes, géocentriques ou rationnelles. — Hauteurs géocentriques. — Parallaxe horizontale. — Coordonnées terrestres et coordonnées stellaires géocentriques.
37. *Rayon du géoïde sphérique* 95
Triangulation. — Mesure de la base. — Signaux. — Mesure des angles. — Excès sphérique. — Vérification. — Résultats.
38. *Le géoïde ellipsoïdal de révolution* 98
Éléments de l'ellipsoïde. — Développements en série. — Coordonnées horizontales et coordonnées terrestres.

39. *Dimensions du géoïde ellipsoïdal de révolution* 103
Mesure du géoïde. — Mètre. — Remarques. — Résultats.

40. *Le géoïde ellipsoïdal non de révolution* 107

41. *Réfraction atmosphérique* 108

42. *Magnétisme terrestre* 110
Déclinaison. — Compas. — Inclinaison.

43. *Représentation de la surface terrestre* 114
Surfaces correspondantes. — Échelle des longueurs. — Scalaire. — Applicabilité. — Orthomorphisme. — Échelle des aires. — La Cartographie. — Projection plate. — Carte conforme de Mercator. — Carte équivalente de Flamsteed. — Carte équivalente de Bonne. — Perspectives. — Projection horizontale. — Projection centrale. — Projection stéréographique.

44. *Rotation de la Terre* 134

CHAPITRE II

Le Soleil

45. *Mouvement du rayon géocentrique solaire* 135
Zodiaque. — Écliptique. — Équinoxes. — Solstices. — Saisons astronomiques. — Tropiques. — Cônes polaires. — Zones terrestres.

46. *Origine des ascensions droites.* 139

47. *Détermination de l'écliptique* 139

48. *Coordonnées écliptiques* 141
Axes coordonnés. — Coordonnées polaires. — Coordonnées écliptiques du Soleil. — Coordonnées écliptiques et coordonnées stellaires.

49. *Correspondance des systèmes de coordonnées* 143

50. *Trajectoire du Soleil dans l'écliptique* 143
Forme de l'orbite solaire.

51. *Distance et grandeur du Soleil* 146
Distance du Soleil. — Parallaxe solaire. — Approximation. — Grandeur du Soleil.

52. *Mouvement du Soleil en longitude* 147
Loi des aires. — Instant défini par une coordonnée écliptique du Soleil. — Anomalie excentrique. — Coordonnées du Soleil à un instant donné.

53. *Mouvement du Soleil en ascension droite et en déclinaison* . . 159

54. *Variations de l'orbite solaire* 160

55. *Description physique du Soleil. Rotation* 161

56. *Spectroscopie solaire* 163
Spectroscopie. — Spectroscope intégrant. — Spectroscope analyseur. — Spectrographes. — Mouvement de la source. — Température du Soleil. — Entretien de l'énergie solaire. — Pression à la surface du Soleil. — Phénomènes magnétiques.

57. *Jours et nuits* 173

58. *Lever et coucher du Soleil. Crépuscule* 177
Crépuscule. — Cercle d'illumination.

59. *Saisons météorologiques. Climats* 181

CHAPITRE III

Déplacements de l'écliptique et de l'équateur

60. *Déplacements séculaires. Précession* 183
Précession. — Variation de l'obliquité. — Réduction des coordonnées. — Mouvement propre du périgée.

61. *Déplacements périodiques. Nutation* 188

62. *Variation des latitudes* 188
Variation des latitudes. — Déviation de la verticale.

CHAPITRE IV

Mesure du temps par le Soleil

63. *Mesure du temps par un astre quelconque* 190

64. *Mesure du temps par le Soleil* 191
Inégalité des jours solaires vrais. — Soleil fictif. — Soleil moyen. — Cadran solaire.

65. *Équation du temps* 193
Zéros de l'équation du temps. — Maxima et minima.

66. *Temps civil, heure légale, heure universelle* 196
Temps civil ; jour civil. — Heure légale. — Heure universelle ; fuseaux horaires. — Cadran de vingt-quatre heures. — Ligne internationale des dates. — Heure d'été.

67. *Années* 199
Année tropique. — Année sidérale. — Année anomalistique.

68. *Durée de l'année tropique en jours sidéraux et en jours moyens* . 200

69. *Rapport du jour sidéral au jour moyen.* 201

70. *Calendrier* 203
71. *La longitude par une hauteur et le temps* 206
72. *Le point par deux hauteurs et le temps* 207

CHAPITRE V

La Lune

73. *La trajectoire lunaire en première approximation* . . 210
Déplacement de la direction géocentrique lunaire. — Orbite lunaire. — Problèmes.
74. *Distance de la Lune* 214
Problème — Cas particulier. — Cas particulier usuel. — Parallaxe lunaire. — Rayon de la Lune
75. *La trajectoire lunaire en deuxième approximation* . . . 218
76. *Révolutions lunaires* 219
77. *Phases de la Lune* 221
Prédiction approchée des phases de la Lune — Lumière cendrée.
78. *Aspect. Rotation. Libration* 225
79. *Éclipses de Soleil* 227
Description du phénomène. — Prédiction des éclipses — Cartes d'éclipses. — Solution pratique de première approximation. — Durée de la révolution synodique.
80. *Occultations* 233
Parallaxe lunaire au moyen des occultations.
81. *Éclipses de Lune* 234
82. *Possibilité des éclipses* 236

TROISIÈME PARTIE

COORDONNÉES HÉLIOCENTRIQUES

CHAPITRE PREMIER

Le système solaire

83. *Mouvement apparent des planètes* 239
84. *Translation de la Terre* 240

85. *Aberration de la lumière* 242
Vitesse de la lumière. — Problème. — Aberration diurne, aberration annuelle. — Aberration planétaire.

86. *Orbites planétaires* 246
Étude d'une orbite planétaire. — Ensemble des orbites planétaires. — Éléments elliptiques. — Détermination d'une orbite planétaire. — Résultats. — Distances à la Terre.

87. *Explication du mouvement apparent des planètes*. 256
Moyen mouvement. — Étude géométrique. — Étude analytique.

88. *Passage des planètes inférieures sur le Soleil* 261

89. *Grandeur et rotation des planètes. Particularités diverses* . . 262
Éclat. — Phases. — Grandeur. — Étude de la surface. — Rotation. — Aplatissement. — Mercure. — Vénus. — Mars. — Jupiter. — Saturne et ses anneaux. — Uranus. — Neptune.

90. *Les petites planètes* 269
Découverte et classification. — Éclat et dimensions. — Petite planète intramartienne, Éros. — Petites planètes transjoviennes. — Lois empiriques des distances des planètes au Soleil. — Orbite circulaire provisoire d'une petite planète.

91. *Parallaxe solaire par la parallaxe d'une planète* 275

92. *Satellites* 276
Satellites de Mars. — Satellites de Jupiter. — Vitesse de la lumière par l'observation des satellites de Jupiter. — Satellites de Saturne. — Satellites d'Uranus. — Satellites de Neptune. — Loi empirique de la distribution des satellites.

93. *Parallaxe du Soleil par la vitesse de la lumière* 281

94. *Comètes* 282
Problèmes sur les orbites paraboliques. — Vitesses. — Calcul du temps. — Position de la comète. — Aspect des comètes.

95. *Étoiles filantes*. 286

CHAPITRE II

L'attraction universelle

96. *Le solide stellaire* 287

97. *Rotation de la Terre. Pesanteur* 288
Rotation de la Terre. — Pesanteur. — Preuves mécaniques de la rotation de la Terre. — Mesure de l'accélération due à la pesanteur. — Exploration dynamique du géoïde.

98. *Attraction universelle* 293
Planètes. — Comètes. — Satellites. — Attraction terrestre. —

Attraction universelle. — Problème des deux corps : équations différentielles du mouvement relatif ; intégrales premières ; équation différentielle en r ; nature de la trajectoire ; éléments géométriques de l'orbite ; élément cinématique : les constantes des intégrales premières. — Problème des $(n + 1)$ corps. — Précession. — Calcul de l'aplatissement de la Terre par les observations astronomiques. — Nutation. — Existence des surfaces terrestres de niveau.

99. *Masse et densité des planètes* 320
Masse des planètes accompagnées de satellites. — Masse de la Terre. — Masse des planètes dépourvues de satellites. — Pesanteur à la surface des planètes. — Densité des planètes. — Mesure de la densité moyenne de la Terre. — Masse des satellites. — Forme des corps célestes.

100. *Parallaxe du Soleil par les inégalités du mouvement elliptique* . 325

101. *Marées* 326
Les phénomènes. — Théorie statique. — Théorie dynamique.

102. *Rigidité de la Terre* 336
Élasticité des solides. — Hypothèse provisoire de l'homogénéité de la Terre. — Le problème de la rigidité de la Terre.

CHAPITRE III

Les étoiles

103. *La grandeur des étoiles* 340

104. *Constellations* 341

105. *Distance des étoiles* 344

106. *Étoiles doubles et multiples* 346

107. *Étoiles variables. Étoiles temporaires* 348

108. *Amas et nébuleuses* 349

109. *Spectroscopie stellaire* 350
Classification spectroscopique des étoiles. — Étoiles doubles spectroscopiques. — Étoiles nouvelles. — Nébuleuses.

110. *Mouvements des étoiles* 353
Axes de repère. — Vitesses des étoiles. — Vitesses des nébuleuses.

111. *Mouvement du Soleil* 357
Axes de repère. — Direction et vitesse du Soleil.

Louvain. — Imp. Fr. Ceuterick, rue Vital Decoster, 60.

Astron
A

162312

Author Alliaume, Maurice

Title Cours d'astronomie, partie générale élémentaire

University of Toronto
Library

DO NOT
REMOVE
THE
CARD
FROM
THIS
POCKET

Acme Library Card Pocket
Under Pat. "Ref. Index File"
Made by LIBRARY BUREAU